PROSEMINAR - HS2010

"Ebene algebraische Kurven"

Verantwortliche : Prof. Dr. Ruth Kellerhals und Dr. Geneviève Perren

Sprechstunde : R. Kellerhals, Math 2.103, nach Vereinbarung
G. Perren, Math 0.107, nach Vereinbarung

Hörsaal : Seminarraum, Departement Mathematik II (Lonza)

Termin : Donnerstag, 13h15 - 15h00 ; **Beginn 23. September 2010**

References

[F] Gerd FISCHER, *Ebene algebraische Kurven*, Vieweg.

[C] Alain CHENCINER, *Courbes algébriques planes*, Springer-Verlag.

[W] Robert WALKER, *Algebraic curves*, Princeton University Press.

[BK] Egbert BRIESKORN, Horst KNÖRRER, *Ebene algebraische Kurven*, Birkhäuser.

Weitere Referenzen und Materialien werden nach Bedarf zur Verfügung gestellt.

TEIL I – Vorbereitungen

Vortrag I.0: *Algebraische Vorbereitungen*

Es werden die notwendigen Eigenschaften von Polynomringen in mehreren Variablen vorgestellt und die Resultante diskutiert. [F, Anhang 1], [C], [BK]

Vortrag I.1: *Einführung und Beispiele zu ebenen algebraischen Kurven*

Zu Beginn von Teil II wird das Studium der ebenen algebraischen Kurven durch Angabe und Charakterisierung vieler Beispiele motiviert. [F, pp. 1-11]

Vortrag I.2: *Affin-algebraische Kurven und ihre Gleichungen*

Die Nullstellenmenge $V(f) \subset \mathbb{C}^2$ eines Polynoms $f(x_1, x_2)$ über $\mathbb{C}$ wird auf ihre topologischen Eigenschaften (Zusammenhangskomponenten, Grad, Schnittpunktverhalten mit Geraden usw) hin untersucht. [F, pp. 12-18]

Vortrag I.3: *Der projektive Abschluss und der Satz von Bézout*

Der fundamentale Satz von Bézout besagt, in wievielen Punkten sich zwei algebraische Kurven (ohne gemeinsame Komponenten) in $P_2(\mathbb{C})$ schneiden. [F, pp. 19-28]

Vortrag I.4: *Tangenten und Singularitäten*

Es werden glatte und singuläre Punkte einer Kurve $C = V(f)$, f Minimalpolynom von C, eingeführt. Für jeden glatten Punkt p von C wird die Tangente T_pC betrachtet (sie ist jene Gerade durch p, welche um p herum möglichst nahe bei C verläuft). Der zentrale Satz in diesem Vortrag besagt, dass eine irreduzible algebraische Kurve $C \subset P_2(\mathbb{C})$ vom Grad n höchstens $\gamma(n) = (n-1)(n-2)/2$ Singularitäten besitzt. $\gamma(n)$ heisst das Geschlecht der Kurve C. [F, pp. 29-41]

Vortrag I.5: *Polaren und Hesse-Kurve*

Es werden folgende Fragen behandelt und beantwortet: Wie findet man die Tangenten an und die Wendepunkte eine algebraischen Kurve $C \subset P_2(\mathbb{C})$? Dazu wird der (typische projektive) Begriff der Polaren von C bezüglich eines Punkts $q \in P_2(\mathbb{C})$ eingeführt und mit vielen Beispielen illustriert. Mit Hilfe der Hesse-Matrix zu einem Polynom $F \in \mathbb{C}[x_1, x_2]$ wird die Hesse-Kurve $H(C) = V(\det(\mathrm{Hess}_F)) \subset P_2(\mathbb{C})$ betrachtet. Schliesslich wird gezeigt, dass $\operatorname{Sing} C \subset H(C)$, und dass $p \in C$ genau dann eine Wendepunkt ist, wenn $p \in H(C)$. [F, pp. 42-51]

Vortrag I.6: *Duale Kurven*

Eine algebraischen Kurve $C \subset P_2(\mathbb{C})$ wird auf natürliche Weise die sogenannte duale Kurve C^* in $P_2(\mathbb{C})$ zugeordnet. Es wird nachgewiesen, dass C^* algebraisch ist, falls C keine Gerade enthält, und dass mit C auch C^* irreduzibel ist. Dieser Vortrag ist eng mit Vortrag II.7 verknüpft. [F, pp. 52-60]

Vortrag I.7: *Die Plückerformeln*

In einem ersten Schritt wird der Zusammenhang zwischen C und der dualen Kurve C^* komplettiert und gezeigt, dass $C^{**} = C$, und wie sich kritische Punkte beim Dualisieren verhalten. Schliesslich werden die berühmten Plücker-Formeln an einigen Beispielen verifiziert und anschliessend bewiesen. [F, pp. 61-70]

TEIL II – Beweise aus de lokalen komplexen Analysis

Vortrag II.1.1: *Der Ring der konvergenten Potenzreihen*

Der Ring der formalen Potenzreihen wird eingeführt und der Konvergenzeigenschaften. [F, pp. 71-77]

Vortrag II.1.2: *Der Vorbereitungssatz und die Divisionsformel von Weierstrass*

Die beiden wichtigen Sätze werden formuliert und bewiesen. [F, pp. 77-85]

Vortrag II.1.3: *Der Ring der konvergenten Potenzreihen ist faktoriell*

Mit Hilfe der Weierstrass-schen Sätze können wichtige Anwendungen wie die Teilbarkeitkeitstheorie für Potenzreihen beschrieben werden. Als geometrische Anwendung resultiert die lokale Zerlegung einer Kurve in sogenannte Zweige. [F, pp. 86-94]

Vortrag II.2.1: *Der Satz von Puiseux*

Der Vortrag beginnt mit der Definition von Puiseux-Reihen, welche dem Zweck der lokalen Parametrisierung von Kurvenzweigen dienen. Im Anschluss werden konstruktive Verfahren von Newton und Puiseux (bei zwei Variablen) besprochen. Dabei spielt das sogenannte Newton-Polygon eine Rolle. [F, pp. 95-103]

Vortrag II.2.2: *Konvergenz von Puiseux-Reihen*

In diesem Teil wird ein Konvergenz-Zusatz zum Satz von Puiseux bewiesen. Dieser wird Picard folgend in eine geometrische Form gebracht und anschliessend mit teilweise topologischen Mitteln (etwas Überlagerungstheorie) bewiesen. [F, pp. 103-112]

Vortrag II.3.1: *Tangenten von Kurvenkeimen*

In diesem Vortrag wird der Beweis des Satzes nachgeliefert, welcher eine Kurve als Tangente an eine algebraische Kurve $C \subset P_2(\mathbb{C})$ charakterisiert. [F, pp. 113-119]

Vortrag II.3.2: *Die Schnittmultiplizität mit einem irreduziblen Kurvenkeim*

Als weitere wichtige Anwendung der Puiseux-Sätze wird eine Methode zur Berechnung der Schnittmultiplizität mit einem irreduziblen Kurvenkeim vorgestellt. [F, pp. 119-125]