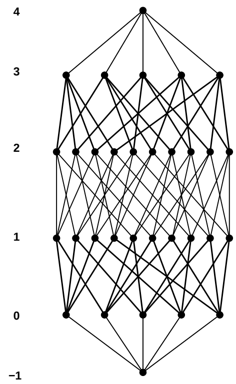
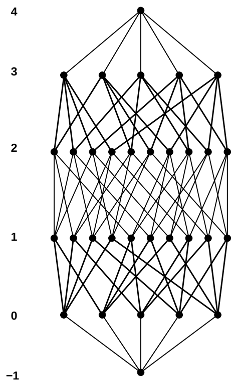


Dr. Thomas Zehrt

Matthieu Jacquemet

Thematisches Seminar - FS 2014

Algebraische Kombinatorik



Allgemeines: In der algebraischen Kombinatorik werden diskrete Strukturen (wie z.B. Graphen, partiell geordnete Mengen oder Gitter) und in diesen Strukturen auftretende Zählprobleme mit Hilfe (linear) algebraischer Methoden untersucht. Dabei folgt das Seminar im Wesentlichen dem Buch [St1].

Zielgruppe: Studierende der Mathematik (und Physik) ab dem 5. Semester.

Voraussetzungen: Lineare Algebra und Algebra sowie Stochastik für Vortrag 6.

Leitung:

Thomas Zehrt `E-mail:` thomas.zehrt@unibas.ch

Matthieu Jacquemet `E-mail:` matthieu.jacquemet@unifr.ch

Zeit/Ort: Dienstag, 15.15 - 17.00 Uhr, Math II 0.101.

Literatur

[A] Martin Aigner, A Course in Enumeration, Springer 2007.

[L] L. Lovasz, Random Walks on Graphs: A Survey, in *Combinatorics, Paul Erdős is Eighty (Volume 2), Bolyai Society Mathematical studies, 2 (Keszthely, Hungary, 1993), pp. 1-46*

Download unter: *www.cs.elte.hu/∼lovasz/erdos.pdf*

[St1] Richard P. Stanley, Algebraic Combinatorics, Springer 2013.

Download einer reduzierten Version unter: *www-math.mit.edu/∼rstan/algcomb/algcomb.pdf*

[St2] Richard P. Stanley, Enumerative Combinatorics, Volume I, Cambridge University Press 1997.

[T] Anusch Taraz, Diskrete Mathematik, Birkhäuser 2012.

Vorträge

1. Vortrag: Enumerative Kombinatorik

Hier sollen elementare Zählprinzipien, Teilmengen und Binomialkoeffizienten, Partitionen und Stirlingzahlen $S_{n,k}$ (der 2. Art), Permutationen und Stirlingzahlen (der 1. Art) $s_{n,k}$ und Partitionen von Zahlen behandelt werden.

[A], Seiten 5-36.

2. Vortrag: Rationale erzeugende Funktionen

Viele Zählprobleme lassen sich sehr elegant mit Hilfe erzeugender Funktionen lösen. Hier sollen die Zusammenhänge zwischen rationalen erzeugenden Funktionen, linearen Rekursionen und deren Lösungen erklärt und an einigen Beispielen angewendet werden.

[St2], Seiten 202-210.

[A], Seiten 93-104.

[St1], Seite 6, Lemma 1.7.

3. Vortrag: Einführung in die Graphentheorie

Netzartige Stukturen lassen sich gut durch Graphen modellieren. Hier sollen zunächst die Grundlagen der Graphentheorie (Definitionen, Adjazenzmatrix, Gradliste eines Graphen, Cliquenzahl, Stabilitätszahl, chromatische Zahl, Isomorphie, Wege und Kreise, event. auch Euler-Touren und Hamilton-Kreise) behandelt werden. Dann sollen wichtige Familien von Graphen vorgestellt werden, wie z.B. Bäume, reguläre Graphen, vollständige Graphen und bipartite Graphen. Letztendlich soll noch auf die wichtige Klasse der planaren Graphen eingegangen und die Polyederformel von Euler bewiesen werden

[St1], Seite 1.

[T], Seiten 41-54 und 60-62.

4. Vortrag: Wege in Graphen

Hier sollen zunächst die allgemeinen Zusammenhänge zwischen der Anzahl der Wege in einem Graphen einer bestimmten Länge und den Eigenwerten (und Eigenvektoren) der Adjazenzmatrix erklärt werden. Dieses Wissen wollen wir nutzen, um Zählformeln für Wege einer bestimmten Länge in vollständigen Graphen herzuleiten.

[St1], Seiten 1-9.

5. Vortrag: Wege in n-Würfeln

Hier wollen wir Zählformeln für Wege einer bestimmten Länge in n-Würfeln herleiten. Dazu wird die diskrete Radon-Transformation eingeführt und genutzt, um die Eigenwerte der Adjazenzmatrizen dieser Graphenfamilie zu beschreiben.

[St1], Seiten 11-19.

6. Vortrag: Zufallswege (random walks) in Graphen

Hier sollen Zufallswege in Graphen besprochen und typische Fragestellungen vorgestellt (und beantwortet) werden.

[St1], Seiten 21-30.

([L] als Ergänzung).

7. Vortrag: Partiell geordnete Mengen

In diesem Abschnitt sollen partiell geordnete Mengen eingeführt werden. Wichtige Begriffe sind: Hasse-Diagramm, Isomorphie, Ketten, Antiketten, Rang, Niveaus, rangerzeugende Funktion, Rangsymmetrie, Rangunimodularität, Sperner-Eigenschaft, Konstruktionen $P+Q$, $P \oplus Q$, $P \times Q$ und $P \otimes Q$, Gitter und distributive Gitter. Auch wichtige Beispiele wie $[n]$, B_n, D_n, Π_n und $L_n(q)$ sollen vorgestellt werden.

[St1], Seiten 31-33.

[St2], Seiten 96-107.

8. Vortrag: Der Satz von Sperner

Hier soll zunächst die Sperner-Eigenschaft vorgestellt und dann der Satz von Sperner mit Hilfe so genannter Ordnungsabbildungen bewiesen werden. Ergänzend kann noch auf alternative Beweise des Satzes eingegangen werden.

[St1], Seite 33-41.

9. Vortrag: Gruppenaktionen auf der Boolschen Algebra

Für die Boolsche Algebra B_n werden Eigenschaften von Quotienten B_n/G untersucht. Diese Resultate werden dann genutzt, um die Anzahl nichtisomorpher Graphen zu untersuchen. Weiterhin können so genannte Rekonstruktionsvermutungen vorgestellt werden.

[St1], Seiten 43-55.

10. Vortrag: Young-Diagramme und q-Binomialkoeffizienten

Hier soll die Anzahl spezieller Partitionen mit Hilfe so genannter Young-Gitter bzw. Young-Diagramme untersucht werden.

[St1], Seiten 57-73.

11. Vortrag: Pólya-Theorie

Hier soll die so genannte Pólya-Theorie vorgestellt werden, die es allgemein erlaubt, unter einer Gruppenaktion inäquivalente Objekte zu zählen. Pólyas Theorem wird bewiesen und auf einige interessante Fälle angewendet. (Bemerkung: Dieser Vortrag könnte auch auf 2 Studierende aufgeteilt werden.)

[St1], Seiten 75-101.

12. Vortrag: Der Matrix-Baum Satz

Der Matrix-Baum Satz, der hier vorgestellt und bewiesen werden soll, drückt die Anzahl aufspannender Bäume eines Graphen $\kappa(G)$ durch die Determinante einer bestimmten Matrix aus. Weiterhin kann auf alternative Beweise für den Spezialfall $\kappa(K_p)$ eingegangen werden.

[St1], Seiten 135-150.

13. Vortrag: Gerichtete Euler-Graphen und orientierte Bäume

Hier wird untersucht, wieviele Euler-Wege in einem gerichteten Graphen existieren.

[St1], Seiten 151-161.

14. Vortrag: Zykel, Ränder und Netzwerke

[St1], Seiten 163-185.