Série 13

Exercice 3

On a $M = \{0, 1, e^{i\varphi}\}$ et $c(M) = \{0, 1, e^{-i\varphi}\}$.
De plus :

$$\mathbb{Q}(M \cup c(M)) = \mathbb{Q}(0, 1, e^{i\varphi}, e^{-i\varphi})$$
$$= \mathbb{Q}(e^{+i\varphi}).$$

Le polynôme $f(x) = x^3 - e^{i\varphi/3} \in \mathbb{Q}(e^{i\varphi})$ annule $e^{i\varphi/3}$. Pour prouver l'assertion, il suffit donc de montrer qu'il est irréductible. Ainsi, on aura :

$$[\mathbb{Q}(e^{i\varphi})(e^{i\varphi/3}) : \mathbb{Q}(e^{i\varphi})] = 3 \neq 2^{\ell}.$$

$f(x)$ irred dans $\mathbb{Q}(e^{i\varphi})[x]$

$\iff x^3 - t$ irred. dans $\mathbb{Q}(t)[x]$

$\iff x^3 - t$ irred dans $\mathbb{Q}[t][x]$,

puisque $x^3 - t$ est primitif.

On passe au quotient par $\langle x \rangle$:

$-t$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[t]$.

$\Longrightarrow x^3 - t$ irred. dans $\mathbb{Q}[t][x]$

$\Longrightarrow \ldots \Longrightarrow$ ☺.

Exercice 4

N'oublier pas de faire le lien entre la question géométrique qui vous est posée et l'algèbre...