Cours du Prof. Dr. Anand Dessai

Rafael Guglielmetti, Nicolas Weisskopf

Algèbre et géométrie I

Série 13

À rendre avant vendredi 24 janvier 2014, 12h00

Exercice 1 (Extensions algébriques)
Soit $K \subseteq L$ une extension de corps.

(a) Montrez que les assertions suivantes sont équivalentes :

i) $K \subseteq L$ est une extension finie.

ii) L est engendré par un nombre fini d'éléments algébriques sur K.

iii) $K \subseteq L$ est une extension algébrique de génération finie.

(b) Montrez que les assertions suivantes sont équivalentes :

i) $K \subseteq L$ est une extension algébrique.

ii) L est engendré par des éléments algébriques sur K.

Exercice 2 (Clôture algébrique)
Soit $K \subset \mathbb{C}$ un corps. Montrez que $\overline{K} := \{\alpha \in \mathbb{C} \mid \alpha \text{ est algébrique sur } K\}$ est un corps algébriquement clos.

Exercice 3 (Trisection de l'angle)
Soit $\varphi \in]0, 2\pi[$ un nombre réel tel que $e^{i\varphi}$ soit transcendant. Montrez que $e^{i\varphi/3}$ n'est pas constructible à la règle et au compas à partir de l'ensemble $M = \{0, 1, e^{i\varphi}\}$.

Exercice 4 (Construction de polygones réguliers, **Bonus**)
Soient $p \in \mathbb{N}$ un nombre premier et $p \neq 2^n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrez que le polygone régulier à p côtés n'est pas constructible à la règle et au compas à partir de l'ensemble $M = \{0, 1\}$.
(*Rappel : Le polynôme $x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + x + 1$ est le polynôme minimal de $e^{2\pi i/p}$ sur $\mathbb{Q}$.*)