Serie 12 :

Aufgabe 1 :

a) Seien $X, Y \in \mathcal{D}er_p(M)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ $X, Y : \mathcal{E}(p) \longrightarrow \mathbb{R}$ linear $\Rightarrow$ $X, Y \in \mathrm{Hom}(\mathcal{E}(p), \mathbb{R})$.

Weiter gilt :

$$\begin{aligned}(\lambda X + Y)(f \cdot g) &= \lambda X(f \cdot g) + Y(f \cdot g) \\ &= \lambda X(f) g(p) + f(p) \lambda X(g) + Y(f) g(p) + f(p) Y(g) \\ &= (\lambda X + Y)(f) g(p) + f(p)(\lambda X + Y)(g).\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ $\mathcal{D}er_p(M)$ ist ein UVR.

b) Sei $\varphi^* : \mathcal{E}(q) \to \mathcal{E}(p)$, $g \mapsto g \circ \varphi$.

Dann gilt :

- $$\begin{aligned}\varphi^*(\lambda g + \tilde{g}) &= (\lambda g + \tilde{g}) \circ \varphi \\ &= \lambda g \circ \varphi + \tilde{g} \circ \varphi \\ &= \lambda \varphi^*(g) + \varphi^*(\tilde{g}).\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}\varphi^*(g \cdot \tilde{g}) &= (g \cdot \tilde{g}) \circ \varphi \\ &= (g \circ \varphi) \cdot (\tilde{g} \circ \varphi) \\ &= \varphi^*(g) \, \varphi^*(\tilde{g}).\end{aligned}$$

Aufgabe 2:

a) S^n kompakt, $f: S^n \to \mathbb{R}$ diff'bar.

$\Rightarrow$ f hat ein Min und Max in p und q.

Sei $[\gamma] \in T_pM$. Dann hat $f \circ \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ ein Max.

$\Rightarrow$ $f_*([\gamma]) = [f \circ \gamma] = (f \circ \gamma)'(0) = 0$.

$\Rightarrow$ $(f_*)_p$ und $(f_*)_q$ sind Nullabbildungen.

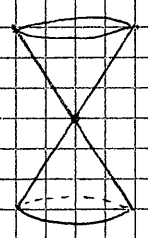
b) Wir berechnen das Differential von ϕ_c.

$d\phi_c = (2x, 2y, 2z)$.

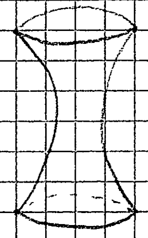
$0 \in \mathbb{R}$ ist regulär, falls $0 \notin \phi_c^{-1}(0)$.

$\Rightarrow$ 0 ist regulär, falls $c \neq 0$.

$c = 0$:



$c \neq 0$:



Aufgabe 3 :

a) Sei $\omega : V \times \dots \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ eine alternierende k-Form.

Sei $\tau \in S_k$ eine Transposition. Dann ist

$$\omega(v_1, \dots, v_{\tau(i)}, \dots, v_{\tau(j)}, \dots, v_k) =$$

$$= (-1)\, \omega(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_k)$$

$$= \operatorname{sign}(\tau)\, \omega(v_1, \dots, v_k).$$

Weiter lässt sich jede Permutation $\sigma \in S_k$ als Komposition von Transpositionen beschreiben. Das Resultat folgt, da sign ein Homomorphismus ist.

b) $\omega : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ ist die Determinante.

Also ist ω alternierend.

Weiter gilt :

- $a_{11} = \omega(e_1, e_1) = 0$, $a_{12} = \omega(e_1, e_2) = 1$
  $a_{21} = \omega(e_2, e_1) = -1$, $a_{22} = \omega(e_2, e_2) = 0$

- $a_{11} = \omega(e_1 + e_2, e_1 + e_2) = 0$
  $a_{12} = \omega(e_1 + e_2, e_1 - e_2) = -2$
  $a_{21} = \omega(e_1 - e_2, e_1 + e_2) = 2$
  $a_{22} = \omega(e_1 - e_2, e_1 - e_2) = 0.$

Aufgabe 4.

Es ist $(df)_0 : \mathrm{Der}_0 \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Linearform in $\mathrm{Hom}(\mathrm{Der}_0 \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

Die Vektoren $\frac{\partial}{\partial x_i}$ bilden eine Basis von $\mathrm{Der}_0(\mathbb{R}^n)$.

Die Vektoren dx_i bilden die duale Basis von $\mathrm{Der}_0(\mathbb{R}^n)^*$.

Es gilt: $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(0)\, dx_i\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(0)$.

Weiter ist: $\frac{\partial}{\partial x_j} : g \longrightarrow \frac{\partial g}{\partial x_j}(0)$

$$f_*\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) : g \longmapsto \frac{\partial}{\partial x_j}(g \circ f)(0) \quad , \quad t := f(x_1, \dots, x_n)$$

$$\parallel$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j} f(0) \frac{\partial}{\partial t}$$

Weiter ist: $\mathrm{Der}_g \mathbb{R} \xrightarrow{\cong} T_g \mathbb{R} \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}$

$$\frac{\partial}{\partial t} \longmapsto [g + t] \longrightarrow 1$$

Also ist: $df\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(0)$.

Aufgabe 5:

Seien $M = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 5 \}$

$N = \{ (x,0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in (-1,1) \}$.

Die Differentialformen der Grad 0 sind die diff'baren Abbildungen. Also gilt für die top. Summe $M \oplus N$, dass

$$\Omega(Z) \cong \Omega^0(M) \oplus \Omega^0(N)$$

Der Kern von d sind die lokal konstanten Funktionen. Also ist

$$\ker d = \{ (f,g) : M+N \to \mathbb{R} \mid f : M \to \mathbb{R} \text{ konst.}, \; g : N \to \mathbb{R} \text{ konst} \} \cong \mathbb{R}^2 .$$