Cours du Prof. Dr. Anand Dessai ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE II

Rafael Guglielmetti, Nicolas Weisskopf

SÉRIE 12
À rendre avant le jeudi 22 mai, 16h

Exercice 1 (Espace des dérivations)

1. Montrez que $\mathcal{D}er_p(M)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}(p)^* := \mathrm{Hom}(\mathcal{E}(p), \mathbb{R})$.
2. Soit $\varphi : M \to N$ différentiable avec $q = \varphi(p)$ et soit $\varphi^* : \mathcal{E}(q) \to \mathcal{E}(p), g \mapsto g \circ \varphi$. Montrez que l'on a alors
$$\varphi^*(\lambda g + \tilde{g}) = \lambda\varphi^*(g) + \varphi^*(\tilde{g})$$
$$\varphi^*(g \cdot \tilde{g}) = \varphi^*(g) \cdot \varphi^*(\tilde{g})$$
(i.e. φ^* est un homomorphisme d'algèbres).
3. Montrez que
$$\Theta : T_pM \to \mathcal{D}er_p(M),\ [\gamma] \mapsto \{f \mapsto (f \circ \gamma)'(0)\}$$
est une application linéaire.

Exercice 2 (Points critiques et valeurs régulières)

1. Soit $f : S^n \to \mathbb{R}$ une application différentiable. Montrez qu'il existe deux points $p, q \in S^n$, $p \neq q$, avec $(f_*)_p = (f_*)_q = 0$.
2. Soit $c \geq 0$ une constante et
$$\phi_c : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 - z^2 - c.$$
Dessinez l'image réciproque $\phi_c^{-1}(0)$ pour $c = 0$ et $c > 0$. Pour quel $c \geq 0$ est-ce que $0 \in \mathbb{R}$ est une valeur régulière ?

Exercice 3 (Forme alternée)

a) Soient V un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et $\omega : V \times \ldots \times V \to \mathbb{R}$ une k-forme alternée. Montrez que
$$\omega(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}) = \mathrm{sgn}(\sigma) \cdot \omega(v_1, \ldots, v_k), \quad \forall \sigma \in S_k, \forall v_i \in V.$$

b) Soit $\omega : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\omega(\left(\begin{smallmatrix} a \\ c \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} b \\ d \end{smallmatrix}\right)) := ad - bc$.
Montrez que $\omega \in \mathrm{Alt}^2(\mathbb{R}^2)$ et décrivez les composantes de ω pour la base canonique (e_1, e_2) de $\mathbb{R}^2$, ainsi que pour la base $(e_1 + e_2, e_1 - e_2)$.

Exercice 4 (Gradient)
Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une application différentiable telle que $q = f(0)$. Montrez que la forme linéaire $df : \mathcal{D}er_0(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ définie par

$$\mathbb{R}\langle \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \rangle = \mathcal{D}er_0(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{f_*} \mathcal{D}er_q(\mathbb{R}) = \mathbb{R}\langle \frac{\partial}{\partial t} \rangle \cong \mathbb{R}$$

est égale à $\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(0) \cdot dx_i$ où $(dx_1, \dots, dx_n)$ est la base duale de $(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n})$.

Exercice 5 (Forme linéaire)
Soient $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 = 5\}$ et $N = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2;\ |x| < 1\}$. Soit Z la somme topologique de M et N.

Montrez que

$$\Omega^0(Z) \cong \Omega^0(M) \oplus \Omega^0(N).$$

Déterminez le noyau de la dérivée extérieure

$$d : \Omega^0(Z) \to \Omega^1(Z).$$