
Cours du Prof. Dr. Anand Dessai ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE I

Rafael Guglielmetti, Nicolas Weisskopf

SÉRIE 12

À rendre avant jeudi 19 décembre, 17h00

Exercice 0 (Eléments algébriques et transcendants)
Déterminez si les éléments suivants sont algébriques ou transcendants :

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\,,\ \frac{2}{e}\,,\ \pi^3-\pi+1\,,\ -i+\sqrt{3}\,.$$

Exercice 1 (Extensions de degré premier)
Soit $K\subset L$ une extension de corps telle que $[L:K]$ est premier. Montrez que $L=K(\alpha)$ pour tout $\alpha\in L-K$.

Exercice 2 (Corps finis)

1. Y a-t-il un corps avec 10 éléments ?
2. Y a-t-il un anneau intègre avec 10 éléments ?
3. Construisez explicitement un corps à 4 éléments.

Exercice 3 (Eléments algbériques)
Soient $K\subset L$ une extension de corps et $\alpha,\beta\in L$. Montrez que α et β sont algébriques sur K si et seulement si $\alpha+\beta$ et $\alpha\beta$ sont algébriques sur K.

Exercice 4 (Extensions simples)
Soit $K\subset F$ une extension de corps et $\alpha\in F$ un élément algébrique. On considère l'homomorphisme d'anneaux suivant :

$$\begin{aligned}\Phi: K[t] &\longrightarrow F\\ f &\longmapsto f(\alpha).\end{aligned}$$

1. L'application Φ est-elle injective ?
2. Montrez qu'il existe un polynôme unitaire $f\in K[t]$ tel que $K[t]/(f)\cong K[\alpha]$.
   Remarque : Ce polynôme f est appelé *polynôme minimal* de α sur K.
3. Montrez que (f) est premier, donc maximal et donc que f est irréductible.
4. Trouvez le polynôme minimal sur $\mathbb{Q}$ des éléments suivants :

$$\sqrt{5},\quad \sqrt{2}+\sqrt{3},\quad e^{\frac{2\pi i}{p}}.$$

Exercice 5 (Bonus, 4 points)
Soit V un espace vectoriel sur K de dimension n et soit $\varphi: V\to V$ un endomorphisme. On muni V de la structure de $K[X]$-module donnée dans la série 10.

(a) Utilisez le théorème de classification des modules sur un anneau principal (et intègre) pour montrer que
$$V = \bigoplus_p V(p),$$
où les p sont des polynômes irréductibles de $K[X]$ (pris dans un système de représentants d'élément premiers $\mathcal{P}$), et tel que chaque
$$V(p) \cong K[X]/(p^{\nu_1}) \oplus \cdots \oplus K[X]/(p^{\nu_p})$$
est déterminé de manière unique (à isomorphisme près) par les $1 \leq \nu_1 \leq \cdots \leq \nu_p$.

(b) Montrez que la somme de tous les degrés des p^{ν_s} apparaissants dans la décomposition ci-dessus est égale à n, i.e.
$$\sum_p (\deg(p^{\nu_1}) + \cdots + \deg(p^{\nu_p})) = n.$$

(c) Montrez que le polynôme minimal de φ est égal à
$$\prod_p p^{\nu_p}$$
où le produit est pris sur tous les polynômes irréductibles p apparaissant dans la décomposition de V donnée au point (a).

(d) Montrez qu'on peut trouver une base de V telle que la matrice de φ exprimée dans cette base est de la forme
$$\begin{pmatrix} M_{p_1^{\nu_1}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_{p_1^{\nu_{p_1}}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M_{p_k^{\nu_1}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M_{p_k^{\nu_{p_k}}} \end{pmatrix}$$
et où $M_{p^{\nu_s}} \in \mathrm{Mat}(m_{p,s} \times m_{p,s}; K)$ avec $m_{p,s} := \deg(p^{\nu_s})$.