Série 11

Exercice 1

a) Puisque A est principal, p premier $\Rightarrow$ $\langle p \rangle$ maximal et donc $\mathbb{K}$ est effectivement un corps.

On montre que $pF = \{pf : f \in F\}$ est un sous-module de F (comme A-module), càd que F/pF est un A-module et, en particulier, un groupe abélien.

On défini:

$$\begin{aligned} A/\langle p \rangle \times F/pF &\longrightarrow F/pF \\ (a+\langle p \rangle, f+pF) &\longmapsto (a+\langle p\rangle)\cdot(f+pF) := af + pF. \end{aligned}$$

On vérifie que c'est bien défini:

- si $a + \langle p \rangle = \tilde{a} + \langle p \rangle$, on a $a - \tilde{a} \in \langle p \rangle$ càd $a - \tilde{a} = rp$ pour un $r \in A$.
- De même, si $f + pF = \tilde{f} + pF$, $\exists$ $f' \in F$ tq $f - \tilde{f} = p \cdot f'$.

Dans ce cas:

$$\begin{aligned} af + pF &= (\tilde{a} + rp)(\tilde{f} + pf') + pF \\ &= \tilde{a}\tilde{f} + \underbrace{p(r\tilde{f} + (rp)f')}_{\in pF} + pF \\ &= \tilde{a}\tilde{f} + pF. \end{aligned}$$

On vérifie ensuite les différents axiomes ☺.

Indépendance linéaire:

Supp. $\exists$ $\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n}$ tq $\sum_{i=1}^{n} \overline{a_i} \cdot \overline{x_i} = \sum_i a_i x_i + pF = 0_{F/pF}$

$\Rightarrow \sum a_i x_i \in pF \Rightarrow \exists f \in F$ tq $\sum a_i x_i = pf$

Soient $\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_n$ tq $f = \sum \tilde{a}_i x_i$ (existent car $\{x_1, \dots, x_n\}$ est A-générateur).

Alors $\sum_{i=1}^{n} (a_i - p\tilde{a}_i) x_i = 0$.

La liste $\{x_1, \dots, x_n\}$ étant A-linéairement indep, on a $a_i - p\tilde{a}_i = 0$ $\forall i$, càd $a_i \in \langle p \rangle$ $\forall i$

$\Rightarrow \overline{a_i} = 0$ $\forall i$, comme voulu.

Série 11

Exercice 1

a) suite

Soit $f + pF \in F/pF$.

Par hypothèse, $\exists\, a_1, \dots, a_n$ tq $f = \sum a_i x_i$.

On voit alors que $f + pF = \sum \overline{a_i} \cdot \overline{x_i}$.

b) Pour un entier p quelconque, on note

$$A^{(p)} = \bigoplus_{i=1}^{p} A$$

Ces deux bases permettent de construire deux isomorphisme $F \cong A^{(n)}$ et $A^{(m)} \cong F$. Le problème se ramène donc à :

$$A^{(n)} \cong A^{(m)} \Rightarrow m = n.$$

Si A est un corps, $A^{(n)}$ est un A-espace vectoriel et le résultat est connu. Sinon, $\exists\, a \in A \setminus \{0\}$ tel que a n'est pas inversible. On a :

$$0 \subsetneq aA \subsetneq A$$

L'idéal aA est donc contenu dans idéal maximal M. On a alors :

$$A^{(n)} / \underbrace{M \oplus \dots \oplus M}_{n \text{ fois}} \cong \bigoplus_{i=1}^{n} A/M \cong K^n$$

$\llcorner K = A/M$

$$\wr\|$$

$$A^{(m)} / \underbrace{M \oplus \dots \oplus M}_{m \text{ fois}} \cong K^m$$

De nouveau, la théorie des espaces vectoriels nous dit $m = n$.