UNI
FR
UNIVERSITÉ DE FRIBOURG
UNIVERSITÄT FREIBURG

Cours du Prof. Dr. Anand Dessai ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE II

Rafael Guglielmetti, Nicolas Weisskopf

SÉRIE 11
À rendre avant le jeudi 15 mai, 16h

Exercice 1 (La sphère de dimension n)
Soit $S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |x| = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$, ainsi que $N := (1, 0, \dots, 0)$, $S := (-1, 0, \dots, 0)$, $U_N := S^n - \{N\}$ et $U_S := S^n - \{S\}$. On considère aussi les applications

$$h_N : U_N \to \mathbb{R}^n, \quad (x_0, \dots, x_n) \mapsto \frac{(x_1, \dots, x_n)}{(1 - x_0)},$$
$$h_S : U_S \to \mathbb{R}^n, \quad (x_0, \dots, x_n) \mapsto \frac{(x_1, \dots, x_n)}{(1 + x_0)}.$$

Montrez que $\{h_N, h_S\}$ est un atlas différentiel de S^n.

Exercice 2 (Le tore)
Soit $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 =: T^2$. Pour $x \in T^2$ on prend un voisinage ouvert $U_x \subset T^2$ de x tel que

1. $p^{-1}(U_x) = \coprod_{j \in \mathbb{Z}^2} V_{x,j}$, tel que $V_{x,j} \subset \mathbb{R}^2$ ouvert
2. $p|_{V_{x,j}} : V_{x,j} \to U_x$ est un homéomorphisme.

Soit $h_{x,j} = (p|_{V_{x,j}})^{-1}$. Montrez que $\{h_{x,j}\}_{x \in T^2, j \in \mathbb{Z}^2}$ est un atlas différentiel pour T^2.

Exercice 3 (Produit de variétés différentiables)
Soient M et M' deux variétés différentiables ainsi que $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ leurs atlas différentiels respectifs. Définissez une structure de variété différentiable sur le produit $M \times M'$.

Exercice 4 (Courbes et espaces tangents)
Soit M une variété différentiable de dimension m, $p \in M$ et U un voisinage ouvert de p dans M.

(a) Soient $\gamma, \tilde{\gamma} : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ des courbes différentielles, $\gamma(0) = \tilde{\gamma}(0) = p$, et h_α, h_β des cartes de M en p. Montrez l'implication

$$(h_\alpha \circ \gamma)'(0) = (h_\alpha \circ \tilde{\gamma})'(0) \Rightarrow (h_\beta \circ \gamma)'(0) = (h_\beta \circ \tilde{\gamma})'(0).$$

(b) On remarque que h_α définit une structure d'espace vectoriel sur T_pM via

$$(h_\alpha)_* : T_pM \to T_{h_\alpha(p)}\mathbb{R}^m \cong \mathbb{R}^m.$$

Montrez que la structure d'espace vectoriel est indépendante du choix de la carte (i.e. h_β donne la même structure d'espace vectoriel).