Cours du Prof. Dr. Anand Dessai — Algèbre et géométrie I

Rafael Guglielmetti, Nicolas Weisskopf

Série 11

À rendre avant le jeudi 12 décembre, 17h00

Exercice 0 (Classification des groupes abéliens)
À isomorphisme près, trouvez tous les groupes abéliens d'ordre :

a) 53,   b) 1183,   c) 600.

Exercice 1 (Modules libres)

a) Soit F un A-module libre avec base $(x_1, \ldots, x_n)$. Soit $p \in A$ un élément premier. Montrez que F/pF est un espace vectoriel sur le corps $K = A/(p)$ et que les classes

$$\bar{x}_1 = x_1 + pF, \ldots, \bar{x}_n = x_n + pF$$

forment une base de F/pF.

b) Soit F un A-module libre. Soient $(x_1, \ldots, x_n)$ et $(y_1, \ldots, y_m)$ deux bases de F. Montrez que $n = m$.

Exercice 2 (Bases)
Soit F un $\mathbb{Z}$-module libre de dimension n. Montrez ou réfutez les assertions suivantes :

a) Si $x_1, \ldots, x_n \in F$ sont linéairement indépendants, alors $(x_1, \ldots, x_n)$ est une base de F.

b) Si $y_1, \ldots, y_m \in F$ engendrent le module F, alors $\{y_1, \ldots, y_m\}$ contient une base de F.

c) Soit $\varphi : F \to F$ un homomorphisme injectif de $\mathbb{Z}$-modules. Si $x_1, \ldots, x_m \in F$ sont linéairement indépendants, alors $\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_m)$ sont linéairement indépendants.

d) Soit $\varphi : F \to F$ un homomorphisme injectif de $\mathbb{Z}$-modules. Si $(x_1, \ldots, x_n)$ est une base de F, alors $(\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_n))$ est aussi une base de F.

Définition
Soient R un anneau et P un R–module. On dit que P est un R*–module projectif*, si pour toute application de R–modules $f : P \to B$ et pour toute application surjective de R–modules $g : A \twoheadrightarrow B$, il existe une application de R–modules $h : P \to A$ tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[d, two heads, "g"] \\ P \arrow[ur, dashed, "\exists h"] \arrow[r, "f"] & B. \end{tikzcd}$$

Remarque
Dans la définition d'un module projectif, on n'exige pas l'unicité de l'application $h : P \to A$. Il ne s'agit pas d'une propriété universelle.

Exercice 3 (Equivalence de modules projectifs)
Soit P un R–module. Montrez que les assertions suivantes sont équivalentes :

a) P est projectif.

b) Toute suite exacte courte de R–modules

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$$

est *scindée*, i.e. il existe une application de R–modules $h : P \to B$ telle que $g \circ h : P \to P$ est l'identité sur P.

c) Il existe un R–module M tel que $P \oplus M$ est un R–module libre. (En particulier, tout R–module libre est projectif.)

Exercice 4 (Modules projectifs)

a) Montrez que $\mathbb{Z}^n$ est un $\mathbb{Z}$–module projectif.

b) Soit $a \in \mathbb{N}_{>0}$ un entier positif. Montrez que $\mathbb{Z}/a\mathbb{Z}$ n'est pas un $\mathbb{Z}$–module projectif.

c) Montrez que $\mathbb{Q}$ n'est pas un $\mathbb{Z}$–module projectif.
(Indication : Montrez que l'application

$$\varphi : \bigoplus_{n \geq 1} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}, \quad (a_i)_i \mapsto \sum_i \frac{a_i}{i},$$

est un homomorphisme surjectif de $\mathbb{Z}$-modules. Ensuite, montrez qu'il n'existe pas de homomorphisme de $\mathbb{Z}$–modules $s : \mathbb{Q} \to \bigoplus_{n \geq 1} \mathbb{Z}$ tel que $\varphi \circ s = id_{\mathbb{Q}}$. Concluez.)