UNI
FR

UNIVERSITÉ DE FRIBOURG
UNIVERSITÄT FREIBURG

Cours du Prof. Dr. Anand Dessai
Rafael Guglielmetti, Nicolas Weisskopf

Algèbre et géométrie II

Série 10

À rendre avant le jeudi 8 mai, 16h

Exercice 1 (*Relevé du cercle*)
Soit $n \in \mathbb{N}_{>0}$ un entier positif. On considère les deux revêtements $p : \mathbb{R} \to S^1, x \mapsto e^{2\pi i x}$ et $q : S^1 \to S^1, e^{2\pi i x} \mapsto e^{2\pi i n x}$ de S^1.

a) Calculez $q_*(\pi_1(S^1, 1)) \subseteq \pi_1(S^1, 1)$.

b) Montrez qu'il existe $\tilde{p} : \mathbb{R} \to S^1$ tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, dotted, "\tilde{p}"] \arrow[dr, "p"'] & S^1 \arrow[d, "q"] \\ & S^1 \end{tikzcd}$$

commute, i.e. $p = q \circ \tilde{p}$.

Exercice 2 (*Relevés*)
Déterminez lesquelles des applications continues suivantes $f : Z \to S^1$ admettent un relevé $\tilde{f} : Z \to \mathbb{R}$ pour le revêtement $p : \mathbb{R} \to S^1, x \mapsto e^{2\pi i x}$.

a) $f : \mathbb{C}^* \to S^1, z \mapsto \frac{z^5}{\|z^5\|}$,

b) $f : S^1 \to S^1$ une application quelconque avec $-1 \notin im(f)$.

Exercice 3 (*Revêtements isomorphes*)
Déterminez lesquels des revêtements suivants sont isomorphes ?

a) $\mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*, z \mapsto z^2$;

b) $\mathbb{C}^* \times \{0, 1\} \to \mathbb{C}^*, (z, n) \mapsto z$;

c) $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{C}^*, (x, t) \mapsto t \cdot e^{4\pi i x}$;

d) $\mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*, z \mapsto z^4$;

e) $Z \times \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{C}^*, (x, t) \mapsto t \cdot e^{4\pi i x}$, avec $Z := [0, 1]/\{0, 1\}$.

Exercice 4 (*Groupe fondamental de $\mathbb{R}P^2$*)
On considère le revêtement $p : S^2 \to \mathbb{R}P^2$, $x \mapsto \text{span}(x) = \{\lambda \cdot x \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$. Soit x_0 la droite dans $\mathbb{R}^3$ engendrée par $(1, 0, 0)$.

a) Montrez que $\pi_1(\mathbb{R}P^2, x_0) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
(Vous pouvez utiliser le fait que S^2 est simplement connexe.)

b) Soit $f : \mathbb{R}P^2 \to S^1$ une application continue quelconque. Montrez que f admet un relèvement $\tilde{f} : \mathbb{R}P^2 \to \mathbb{R}$ pour le revêtement $\mathbb{R} \to S^1$, $x \mapsto e^{2\pi i x}$.

c) Soit $f : \mathbb{R}P^2 \to S^1$ continue. Montrez que f est homotope à une application constante.