Cours du Prof. Dr. Anand Dessai ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE I

Rafael Guglielmetti, Nicolas Weisskopf

SÉRIE 10

À rendre avant jeudi 5 décembre, 17h00

Exercice 0 (Changement de base)
Soient R, S des anneaux commutatifs ainsi que M un R-module. Montrez que si $\varphi : S \longrightarrow R$ est un homomorphisme d'anneaux, alors M peut-être vu comme un S-module.

Exercice 1 (Localisation et unités)
Soient A un anneau factoriel, $S \subset A$ une partie multiplicative et $Q(A)$ le corps des fractions de A. De plus, soit $f(x) \in A[x]$ un polynôme irréductible et$f(x) = g(x)h(x)$ avec $g, h \in S^{-1}A[x]$. Montrez que si $g(x)$ est une unité dans $Q(A)[x]$, alors $g(x)$ est une unité dans $S^{-1}A[x]$.

Indications :

1. *Commencez par écrire $g(x) = \frac{a}{s}$ où $a \in A$ et $s \in S$; expliquez pourquoi ceci est possible.*
2. *Utilisez un lemme du cours pour écrire $h(x) = \frac{b}{r}\tilde{h}(x)$, tel que $\tilde{h}(x) \in A[x]$ est primitif, $b \in A$ et $r \in S$.*
3. *Avec cela, développez l'égalité $f(x) = g(x)h(x)$ pour obtenir une égalité polynomiale dans $A[x]$.*
4. *On pose $\mathcal{Q} := \mathcal{P} - \mathcal{P}(S)$, où $\mathcal{P}$ est un ensemble de représentants des éléments premiers de A. Montrez alors que pour tout $q \in \mathcal{Q}$, q ne divise pas a.*
5. *En déduire que $a \in S$ et donc que $g(x)$ est inversible dans $S^{-1}A[x]$.*

Définition 1 (Ensemble générateur)
Soit A un anneau commutatif et E un A-module. On dit qu'un ensemble $X \subset E$ d'éléments de E est un *ensemble générateur* pour E si pour tout $x \in E$, il existe un entier $k \in \mathbb{N}$, des éléments $x_1, \ldots, x_k \in X$ et des éléments $r_1, \ldots, r_k \in A$ tels que

$$x = \sum_{i=1}^{k} r_i x_i.$$

Remarque : On ne demande *pas* que l'écriture soit unique.

Définition 2
Si, dans la définition précédente, X peut être choisi fini, on dit que E peut être engendré sur A par un nombre fini d'éléments.

Exercice 2

(a) Montrez que le $\mathbb{Z}$-module $(\mathbb{Q}, +)$ n'est pas engendré sur $\mathbb{Z}$ par un nombre fini d'éléments de $\mathbb{Q}$.

(b) Soient V un espace vectoriel sur le corps K et $\varphi : V \to V$ un endomorphisme. Montrez les assertions suivantes :

  (i) V muni de la multiplication $p(X)v := p(\varphi)(v)$ est un $K[X]$-module.

(ii) Si V est de dimension fini, alors le $K[X]$-module V est un module de torsion.
(*Indication : Considérez le polynôme caractéristique de φ.*)

Exercice 3 (Quotient)
Soit R un anneau commutatif ainsi que M un R-module.

1. Soit $N \leq M$ un sous-module de M. Rappelez-vous de quelle manière le quotient M/N peut-être vu comme un R-module.
2. Montrez que $\pi : M \longrightarrow M/N$ est un homomorphisme de R-modules.
3. Soit $\varphi : M \longrightarrow M'$ un homomorphisme de R-module. Montrez que φ induit un ismorphisme $\bar{\varphi} : M/\ker\varphi \longrightarrow \mathrm{im}\varphi \subset M'$.

Exercice 4 (Modules et torsion)
Soit A un anneau intègre. Soient E un A-module et

$$E_{\mathrm{tor}} := \{x \in E \mid \exists a \in A, a \neq 0 \text{ avec } ax = 0\}.$$

Montrer les assertions suivantes :

(a) E_{tor} est un sous-module de E.

(b) Le A-module E/E_{tor} est *sans torsion*.

Exercice 5 (Théorème de correspondance, bonus, 2 points)
Soient R un anneau commutatif, M un R-module ainsi que $N \leq M$ un sous-module de M. Montrez que l'application canonique $\pi : M \longrightarrow M/N$ induit une bijection entre les sous-modules de M contenant N et les sous-modules de M/N.