Cours du Prof. Dr. Anand Dessai Algèbre et géométrie I

Rafael Guglielmetti, Nicolas Weisskopf

Série 9 - Corrigé

Exercice 1 (**Irréductibilité de polynômes I**)
Critère d'Eisenstein
Attention, il *faut* que l'élément considéré p soit premier. En particulier, p ne doit pas être inversible. Enfin, dans $\mathbb{F}_2$, 3 et 1 sont le même élément ; en particulier, 3 n'est pas premier !

Exercice 3 (**Anneaux principaux I**)

a) Vous pouvez considérer un des polynômes x^6 et montrer qu'il admet deux décomposition distinctes ou bien l'un des polynômes x^3 ou $x^2 - 1$ et montrer qu'il est irréductible mais pas premier.

b) -

c) On considère donc un idéal I de $\mathbb{Z}[t]$ qui contient un nombre premier p. On a une application surjective $\varphi : \mathbb{Z}[t] \longrightarrow \mathbb{F}_p[t]$ qui envoie un polynôme $f(t) = \sum_i a_i t^i$ sur $\bar{f}(t) = \sum_i \bar{a}_i t^i$, où $\bar{a}_i$ est la réduction de a_i modulo p. Puisque cette application est surjective, l'image $\bar{I} := \varphi(I)$ de I est un idéal de $\mathbb{F}_p[t]$.
Deux cas se présentent :
– $\bar{I} = 0$. Dans ce cas, tout polynôme de I est divisible par p et on vérifie que $I = \langle p \rangle$.
– $\bar{I} \neq 0$. Dans ce cas, on continue.
En composant avec l'application de passage au quotient $\mathbb{F}_p[t] \longrightarrow \mathbb{F}_p/_{\bar{I}}$ on obtient une application $\Phi : \mathbb{Z}[t] \longrightarrow \mathbb{F}_p/_{\bar{I}}$. Puisque $\mathbb{F}_p[t]$ est principal (et que $\bar{I}$ est non-nul), il existe $\bar{f} \in \bar{I}$ tel que $\langle \bar{f} \rangle = \bar{I}$. On choisit une pré-image $f \in \mathbb{Z}[t]$ de $\bar{f}$ et on remarque que l'on peut supposer $f \in I$ (quitte à ajouter un multiple de p). Finalement, on a $I = \langle f, p \rangle$.

Remarque : On vérifie que l'on peut invoquer le premier théorème d'isomorphisme et que l'on a en fait $\mathbb{Z}[t]/_I \cong \mathbb{F}_p/_{\bar{I}}$.