UNI
FR
UNIVERSITÉ DE FRIBOURG
UNIVERSITÄT FREIBURG

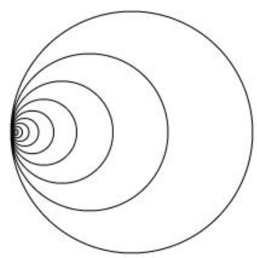
Cours du Prof. Dr. Anand Dessai ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE II

Rafael Guglielmetti, Nicolas Weisskopf

SÉRIE 9

À rendre avant le jeudi 1 mai, 16h

Exercice 1 (Hawaiian earrings)
Soit H le sous-espace de $\mathbb{R}^2$ défini comme étant l'union des cercles de centre $1/n$ et de rayon $1/n$ pour tout nombre entier $n \geq 1$. Cet espace s'appelle les *boucles d'oreilles hawaiienne.*



a) Est-ce que H est connexe ? Localement connexe par arcs ? Connexe par arcs ?

b) Est-ce que H est semi-localement simplement connexe ?

Exercice 2 (Revêtement à k-feuillets)
Soit $p : E \to B$ une application de revêtement où B est un espace connexe. De plus, soient $e_0 \in E$ et $b_0 = p(e_0)$. Montrez que si $p^{-1}(b_0)$ est un ensemble avec exactement k éléments, alors l'ensemble $p^{-1}(b)$ est aussi un ensemble avec exactement k éléments pour tout $b \in B$.

Exercice 3 (Relevé)
Déterminez lesquelles des applications continues suivantes $f : S^1 \to S^1$ admettent un relevé $\tilde{f} : S^1 \to S^1$ pour le revêtement $p : S^1 \to S^1, z \mapsto z^{10}$.

a) $f : S^1 \to S^1, z \mapsto z^2$

b) $f : S^1 \to S^1, z \mapsto z^4$.

Exercice 4 (Sous-groupe caractéristique)
Soit $p : E \to B$ un revêtement avec $b_0 \in B$, $e_0 \in E$ tel que $p(e_0) = b_0$.

a) Soit $\tilde{\alpha} : I \to E$ un chemin avec $\tilde{\alpha}(0) = e_0$ et $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{e}_0 \in p^{-1}(b_0)$ et soit $\alpha = p \circ \tilde{\alpha}$. Montrez que les sous-groupes $p_*(\pi_1(E, e_0))$ et $p_*(\pi_1(E, \tilde{e}_0))$ sont conjugués dans $\pi_1(B, b_0)$ par $[\alpha]$, i.e.

$$p_*(\pi_1(E, e_0)) = [\alpha] \cdot p_*(\pi_1(E, \tilde{e}_0)) \cdot [\alpha]^{-1},$$

où $[\alpha]$ désigne la classe d'homotopie de α dans $\pi_1(B, b_0)$.

b) Soit H un sous-groupe de $\pi_1(B, b_0)$ conjugué à $p_*(\pi_1(E, e_0))$. Montrez qu'il existe un point $\tilde{e}_0 \in p^{-1}(b)$ tel que $H = p_*(\pi_1(E, \tilde{e}_0))$.

c) Supposons maintenant que E est connexe par arc et localement connexe par arc et soit $p' : E' \to B$ un revêtement avec E' connexe par arc et localement connexe par arc, et soit $e'_0 \in E'$ tel que $p'(e'_0) = b_0$. Montrez que $E \cong E'$ si et seulement si $p'_*(\pi_1(E', e'_0))$ et $p_*(\pi_1(E, e_0))$ sont conjugués dans $\pi_1(B, b_0)$.

Exercice 5 (Gardien du musée, Bonus 3pts)
Passant son temps à regarder des tableaux, un gardien de musée se demande un jour s'il est possible d'accrocher un tableau (avec une ficelle) sur 27 clous tel que s'il enlève *n'importe lequel* de ces clous, le tableau tombe ! Aidez le gardien à répondre à sa question.

Indication : Considérez d'abord deux clous et prenez un lacet α autour du premier clou et un lacet β autour de l'autre clou. Ensuite, analysez le commutateur $\alpha * \beta * \alpha^{-1} * \beta^{-1}$. Généralisez pour plusieurs clous.