Cours du Prof. Dr. Anand Dessai

Rafael Guglielmetti, Nicolas Weisskopf

ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE I

SÉRIE 9

À rendre avant le jeudi 28 novembre, 17h00

Exercice 0
Soit A un anneau commutatif, unitaire et intègre. Montrez alors que $A[x]$ est un anneau intègre. Déduisez que $A[x_1, \ldots, x_n]$ est un anneau intègre, si A est un anneau intègre.

Exercice 1 (**Irréductibilité de polynômes I**)
Quels polynômes sont irréductibles ?

$$x^5 - 1 \in \mathbb{Z}[x] \qquad 3x^4 + 100x^3 + 1000x^2 + 10000x + 10 \in \mathbb{Q}[x]$$
$$x^5 - 1 \in \mathbb{Q}[x] \qquad x^2y + xy^2 - x - y + 1 \in \mathbb{Q}[x, y]$$
$$x^3 + x + 1 \in \mathbb{F}_2[x] \qquad x^3 + x + 1 \in \mathbb{F}_3[x]$$
$$x^3 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$$

Exercice 2 (**Irréductibilité de polynômes II**)

a) Soient $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ et $g(x) = f(x+1) \in \mathbb{Q}[x]$. Montrez que $f(x)$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[x]$ si et seulement si $g(x)$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[x]$.

b) Soit $p \in \mathbb{N}$ un nombre premier. Montrez que $f(x) = x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + x + 1$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[x]$.

Exercice 3 (**Anneaux principaux I**)

a) Montrez que le sous-anneau $R := \{p = \sum_i^n a_i x^i \in \mathbb{R}[x] \mid a_1 = 0\} \subset \mathbb{R}[x]$ n'est pas factoriel.

b) Montrez que l'idéal engendré par 2 et x dans $\mathbb{Z}[x]$ n'est pas un idéal principal.

c) Soient $I \subset \mathbb{Z}[x]$ un idéal et $p \in \mathbb{N}$ un nombre premier tels que $p \in I$. Montrez que I est engendré par un ou deux éléments.

Exercice 4 (**Anneaux principaux II**)
Soit A un anneau commutatif, unitaire et intègre.

a) Montrez que $A[x]$ est un anneau principal si et seulement si A est un corps.

b) On considère l'anneau $\mathbb{Q}[x, y]$. Est-il principal ? Est-il euclidien ? Est-il factoriel ?