UNI
FR

UNIVERSITÉ DE FRIBOURG
UNIVERSITÄT FREIBURG

Cours du Prof. Dr. Anand Dessai Algèbre et géométrie II

Rafael Guglielmetti, Nicolas Weisskopf

Série 8
À rendre avant le jeudi 17 avril, 16h

Exercice 0
Est-ce que l'application $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto z^2$, est une application de revêtement ? Justifiez votre réponse !

Exercice 1
Soit $A = (a_{ij}) \in M(3 \times 3, \mathbb{R})$ une matrice telle que $\det A \neq 0$ et $a_{ij} \geq 0$ pour tous i, j. Montrez que A possède une valeur propre réelle positive.

Exercice 2 (Des groupes fondamentaux)
Déterminez le groupe fondamental de chacun des espaces topologiques suivants :

1. le tore plein $\mathbf{T}^3 := S^1 \times D^2$;
2. $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, 1)$;
3. $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$;
4. $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$;
5. $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, z) : z \in \mathbb{R}\}$.

Remarque : pour les espaces 2, 3 et 4, on ne vous demande une preuve rigoureuse.

On rappelle la définition suivante :
Un *revêtement* $p : E \to B$ est une application continue surjective telle que pour tout $b \in B$ il existe un voisinage ouvert $U \subset B$, tel que $U \ni p$ et $p^{-1}(U) = \dot{\bigcup}_j V_j$, où $V_j \subset E$ sont des ouverts, et chaque $p\big|_{V_j} : V_j \to U$ est un homéomorphisme.
Dans ce cas, p est appelée *application de revêtement*.

Exercice 3 (Applications de revêtement)
Parmi les applications suivantes, lesquelles sont des applications de revêtement ? Justifiez votre réponse.

1. $p_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, $x \mapsto x + \mathbb{Z}$.
2. $p_2 : S^1 \to S^1$, $z \mapsto z^{42}$.
3. $p_3 : \mathbb{R}_{>0} \to S^1$, $t \mapsto e^{2\pi i t}$.
4. $p_4 : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}^2 - \{0\}$, $(x, t) \mapsto (t\cos(2\pi x), t\sin(2\pi x))$.

5. $p_5 : S^n \to \mathbb{R}P^n$, $x \mapsto \mathrm{span}(x) := \{t \cdot x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid t \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 4 (Quelques fibres)

1. Soit $p : E \longrightarrow B$ une application de revêtement et $b \in B$. Montrez que $p^{-1}(b)$ est un ensemble discret.
2. Pour les exemples (2), (4) et (5) respectivement, calculez explicitement $p_2^{-1}(1)$, $p_4^{-1}(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ et $p_5^{-1}(\{\lambda \cdot (3, 0, 0, \ldots, 0) \mid \lambda \in \mathbb{R}^*\})$ respectivement.