Cours du Prof. Dr. Anand Dessai

Rafael Guglielmetti, Nicolas Weisskopf

ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE I

SÉRIE 8

À rendre avant jeudi 21 novembre, 17h00

VRAI OU FAUX :

1. $\mathbb{Z}/180\mathbb{Z}$ admet exactement trois idéaux maximaux.

Exercice 0
Parmi les idéaux suivants de $\mathbb{Z}[t]$, lesquels sont premiers ? Lesquels sont maximaux ?

$$\langle t\rangle, \quad \langle 42\rangle, \quad \langle 89\rangle, \quad \langle t+t^9\rangle.$$

Définition 1 (Contenu d'un polynôme, polynôme primitif)
Soit $f \in \mathbb{Z}[x]$ un polynôme. Le *contenu* de f est le plus grand diviseur commun de ses coefficients. Le polynôme f est dit *primitif* si son contenu est 1 (ou -1).

Exercice 1 (Irréductibilité de polynômes)

1. Soient $f, g \in \mathbb{Z}[x]$ deux polynômes primitifs. Montrez que f divise g dans $\mathbb{Q}[x]$ si et seulement si f divise g dans $\mathbb{Z}[x]$.
2. Déduisez le résultat suivant : Un polynôme primitif $f \in \mathbb{Z}[x]$ est irréductible si et seulement s'il est irréductible dans $\mathbb{Q}[x]$.

On rappelle le résultat suivant (que l'on ne vous demande pas de prouver).

Proposition 1
Soit $p > 1$ un nombre entier. Alors, p est un nombre premier si et seulement si

$$(p-1)! \equiv -1 \mod p.$$

Exercice 2 (Somme de deux carrés)
Soit $p \in \mathbb{N}$ un nombre premier tel que $p \equiv 1 \mod 4$.

(a) Montrez qu'il existe $x \in \mathbb{Z}$ tel que $x^2 \equiv -1 \mod p$.
(*Indication : considérez* $x = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot \frac{p-1}{2}$.)

(b) Montrez que $\mathbb{Z}[i]/(p) \cong \mathbb{F}_p[t]/(t^2+1)$.

(c) Utilisez (a) et (b) pour montrer que p n'est pas irréductible dans $\mathbb{Z}[i]$.

(d) Déduisez que p s'écrit comme une somme de deux carrés.
(*Indication : utilisez l'application* $\deg : \mathbb{Z}[i] - \{0\} \to \mathbb{N}$ *vue dans la série 7.*)

Exercice 3 (éléments premiers, irréductibles et factorialité)
On considère l'anneau $R = \mathbb{Z}\left[\sqrt{-5}\right]$.

1. Montrez que $3 \in R$ est irréductible mais pas premier.
2. R est-il factoriel ?

On considère l'anneau $R = \mathbb{Z}[i]$.

1. L'élément $2 \in R$ est-il premier ? Est-il irréductible ?
2. R est-il factoriel ?

Exercice 4 (Anneaux de polynômes)
Soit K un corps.

1. Soit $a \in K$. Montrez que l'idéal $(x - a)$ est maximal dans $K[x]$.
2. Soit $f \in K[x]$. Quels sont les idéaux de $K[x]$ de la forme $(x - a)$ qui contiennent f ?
3. Soit $b \in K$. L'idéal $(x - b)$ est-il un idéal premier de $K[x, y]$? Est-il maximal ?