UNI
FR

UNIVERSITÉ DE FRIBOURG
UNIVERSITÄT FREIBURG

Cours du Prof. Dr. Anand Dessai ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE II

Rafael Guglielmetti, Nicolas Weisskopf

SÉRIE 7

À rendre avant le jeudi 10 avril, 16h

Exercice 0
Montrez que le cercle $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ est un rétract de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Un espace topologique X est *localement connexe par arc* si pour tout $x \in X$ et pour tout voisinage $U \subset X$ de x il existe un voisinage connexe par arc V de x contenu dans U.

Exercice 1 (*Equivalence de connexe et connexe par arc*)
Soit X un espace topologique localement connexe par arc. Montrez que X est connexe si et seulement si X est connexe par arc.
(*Indication : Considérez $S := \{x \in X \mid \exists \gamma : I \to X$ continue, telle que $\gamma(0) = x_0, \gamma(1) = x\}$ pour un certain $x_0 \in X$.*)

Exercice 2 (*Espaces projectifs*)
Soit $\mathbb{R}P^n$ l'espace projectif réel de dimension n muni de la topologie du quotient.

a) Montrez que $\mathbb{R}P^n$ est un espace Hausdorff, compact et connexe.

b) Montrez que $\mathbb{R}P^1$ est homéomorphe à $\mathbb{S}^1$.
(*Indication : Considérez l'application $\mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1, z \mapsto z^2$, où $z \in \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$. Montrez que ceci induit une application $\mathbb{R}P^1 \to \mathbb{S}^1$ qui est bien-définie.*)

Exercice 3 (*Rétract*)

a) Soient $A \subset X$ un rétract de X et $r : X \to A$ une rétraction. Montrez que l'homomorphisme induit $r_* : \pi_1(X, a_0) \to \pi_1(A, a_0)$ est surjectif pour tout $a_0 \in A$.

b) Soient A un rétract de $\overline{B^2} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ et $f : A \to A$ continue. Montrez que f admet un point fixe, i.e. il existe un $a \in A$ avec $f(a) = a$.

Exercice 4 (*Groupe fondamental du produit*)
Soient (X, x_0) et (Y, y_0) deux espaces topologiques. Soient $\pi_X : X \times Y \to X$ et $\pi_Y : X \times Y \to Y$ les projections respectives. Montrez que l'application

$$\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \longrightarrow \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0), \quad [\alpha] \longmapsto ((\pi_X)_*([\alpha]), (\pi_Y)_*([\alpha]))$$

est un isomorphisme. Calculez le groupe fondamental du tore $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ et du cylindre $\mathbb{S}^1 \times [0,1]$.