Cours du Prof. Dr. Anand Dessai ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE I

Rafael Guglielmetti, Nicolas Weisskopf

SÉRIE 7

À rendre avant le jeudi 14 novembre, 16h00

Exercice 0
Soit A un anneau commutatif et unitaire et soit I un idéal premier de A tel que A/I soit fini. Montrez que I est un idéal maximal. Concluez que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un corps si et seulement si n est premier.

Exercice 1 (**Radical**, 2 points)
Soit A un anneau commutatif et soit I un idéal de A. Le *radical* de I est défini par

$$\sqrt{I} := \{a \in A \mid \exists n \in \mathbb{N} \text{ tel que } a^n \in I\}.$$

a) Soient $A_1 = \mathbb{Z}$, $I_1 = 30\mathbb{Z}$ et $I_2 = 13\mathbb{Z}$. Déterminez $\sqrt{I_1}$ et $\sqrt{I_2}$ de A_1.

b) Montrez que $\sqrt{I}$ est un idéal de A qui contient I.

Exercice 2 (**Plus petit commun multiple**)
Soit A un anneau commutatif et unitaire.

(a) Soient $a, b \in A$. Montrez que si $I = (a) \cap (b)$ est un idéal principal de A tel que $I = (v)$, alors v est un plus petit commun multiple de a et b.

(b) Déterminez un plus petit commun multiple de

$$p(x) = x^2 - 1 \quad \text{et} \quad q(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$$

dans $\mathbb{Q}[x]$.

Exercice 3 (**Entiers de Gauss I**)
Soit $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib \in \mathbb{C} \,|\, a, b \in \mathbb{Z}\}$ muni de l'addition et de la multiplication complexe. On considère l'application suivante

$$\deg : \mathbb{Z}[i] - \{0\} \longrightarrow \mathbb{N}, \quad a + ib \longmapsto a^2 + b^2.$$

a) Montrez que $\mathbb{Z}[i]$ est un sous-anneau de $\mathbb{C}$.

b) Montrez que $a + ib \in \mathbb{Z}[i]$ est une unité si et seulement si $\deg(a + ib) = 1$. Déterminez $\mathbb{Z}[i]^*$.

c) Montrez que $\mathbb{Z}[i]$ avec l'application deg forme un anneau euclidien.
(Indication : Il faut montrer que pour $f, g \in \mathbb{Z}[i], g \neq 0$, il existe $q, r \in \mathbb{Z}[i]$ tels que $f = qg + r$ et $\deg(r) < \deg(g)$ ou $r = 0$. Commencez par montrer qu'il existe $q = x + iy$ dans $\mathbb{Z}[i]$ tel que $|fg^{-1} - q| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$. Faites un dessin pour visualiser la situation.)

d) Calculez les plus grands communs diviseurs de $5 + 2i$ et $2 - 5i$ et de $11 + 3i$ et $15 - 2i$.

Exercice 4 (**Entiers de Gauss II**)
Soient $\mathbb{Z}[t]$ l'anneau des polynômes à coefficients dans $\mathbb{Z}$ et $I = (t^2 + 1)$ l'idéal engendré par le polynôme $t^2 + 1$ dans $\mathbb{Z}[t]$.

(a) Utilisez la propriété universelle du quotient pour montrer que $\mathbb{Z}[t]/I \cong \mathbb{Z}[i]$.

(b) Est-ce que I est un idéal premier ?

(c) Est-ce que I est un idéal maximal ?

Exercice 5 (**Jour de la fondue**, 2 points)
Lev mange une fondue tout les 5 jours, Rafael tout les 9 jours et Nicolas tout les 13 jours. Rafael et Nicolas ont mangé une fondue ensemble le 31 octobre, Lev trois jours plus tard. Quand est-ce que les trois garçons pourront-ils de nouveau manger une fondue ensemble ?