UNIVERSITÉ DE FRIBOURG
UNIVERSITÄT FREIBURG

Cours du Prof. Dr. Anand Dessai ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE II

Rafael Guglielmetti, Nicolas Weisskopf

SÉRIE 6

À rendre avant le jeudi 3 avril, 16h

Exercice 0
Soit X un espace topologique et soit $f : [0,1] \longrightarrow X$ un chemin dans X. Soit e_q le chemin constant sur $f(1)$. Montrez que $[f] \star [e_q] = [f]$.

Exercice 1 (Théorème de la valeur intermédiaire et applications)

(a) Soient X un espace topologique, $f : X \to \mathbb{R}$ une application continue et $a, b \in \operatorname{im}(f)$. Montrez que si X est connexe, alors pour tout $c \in \mathbb{R}$ avec $a \leq c \leq b$, c est dans l'image de f.

(b) Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ continue. Montrez qu'il existe $x \in [0,1]$ avec $f(x) = x$ (i.e. f admet un *point fixe*).

(c) Soit $f : S^1 \to \mathbb{R}$ continue. Alors il existe $z \in S^1$ avec $f(z) = f(-z)$.
Remarque : On peut en déduire que sur la terre il existe toujours deux endroits où il fait la même température.

Exercice 2 (Cône et cylindre)
Montrez les assertions suivantes :

(a) Soient X, Y des espaces normaux, $A \subset X$ un sous-ensemble fermé et $f : A \to Y$ une application continue. Montrez que $Y \cup_f X$ est normal.

(b) Soient X, Y des espaces Hausdorff et $f : X \to Y$ une application continue. Montrez que M_f et C_f sont Hausdorff.

(c) Soit Z un espace topologique quelconque. Montrez que $M_f \to Z$ est continue si et seulement si $X \times I \to M_f \to Z$ et $Y \hookrightarrow M_f \to Z$ sont continues.

Exercice 3 (Ensemble étoilé)
Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble étoilé, i.e. il existe un $a_0 \in A$, tel que pour tout $a \in A$ le segment $\{ta + (1-t)a_0 \,|\, t \in I\}$ est contenu dans A. Montrez les affirmations suivantes :

(a) A est simplement connexe (i.e. A est connexe par arcs et $\pi_1(A, a) = \{e\}$ pour tout $a \in A$).

(b) Pour tout espace topologique X et toute application continue $f : X \to A$ on a que f est homotope à une application constante. Décrivez $[X, A]$.

Exercice 4 (Applications homotopes)

(a) Soient X, Y, Z des espaces topologiques, $h, h' : X \to Y$ des applications homotopes et $k, k' : Y \to Z$ des applications homotopes.
Montrez que $k \circ h \simeq k' \circ h'$.

(b) Montrez que pour un espace topologique X, avec $x_0, x_1 \in X$ et α, β deux chemins de x_0 à x_1 tels que $\alpha \simeq_p \beta$. Alors on a que les homomorphismes

$$\hat{\alpha}, \hat{\beta} : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_1)$$

sont égaux.