Cours du Prof. Dr. Anand Dessai

Rafael Guglielmetti, Nicolas Weisskopf

ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE I

SÉRIE 6

À rendre avant mercredi 30 octobre, 17h00

VRAI OU FAUX :

1. S_5 est simple.
2. S_7 est résoluble.
3. $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/50\mathbb{Z}$.

Exercice 0
Soit R un anneau fini intègre. Montrez que R est un corps.

Exercice 1 (p-Sylow de S_p)
Soit p un nombre premier et S_p le groupe symétrique.

1. Quel est l'ordre d'un p-Sylow de S_p ?
2. Combien y a-t-il de p-Sylow dans S_p ?
3. En déduire le théorème de Wilson : $(p-1)! \equiv -1$ modulo p.

(*Indication : Déterminez l'ordre d'un élément de S_p ; pour cela, commencez par déterminer l'ordre d'un k-cycle.*)

Exercice 2 (Résolubilité)

(a) Soient G un groupe, $H \leq G$ un sous-groupe et $\psi : G \to G'$ un homomorphisme de groupes. Montrez que si G est résoluble, alors il en est de même de H, $\mathrm{Im}(\psi)$ et $G/\mathrm{Ker}(\psi)$.

(b) Soit $1 \to K \xrightarrow{\varphi} G \xrightarrow{\psi} L \to 1$ une *suite exacte courte*, i.e. φ est injective, ψ est surjective et $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{Ker}(\psi)$. Montrez que G est résoluble si et seulement si K et L sont résolubles.

Exercice 3 (Anneaux)

(a) Soit A un anneau. Montrez que l'on a, pour tout $a, b \in A$:

$$0 \cdot a = 0 = a \cdot 0, \qquad (-a) \cdot b = a \cdot (-b) = -(ab).$$

(b) Soit A un anneau commutatif unitaire de caractéristique p, avec p premier. Montrez que l'application suivante est un homomorphisme d'anneaux[1] :

$$\begin{aligned} (-)^p : A &\to A \\ a &\mapsto a^p. \end{aligned}$$

1. Cet homomorphisme d'anneaux est communément appelé l'*homomorphisme de Frobenius.*

(c) Montrez que pour p premier, $a^p - a$ est divisible par p pour tout $a \in \mathbb{N}$.

Exercice 4 (Groupe des unités)

(a) Soit A un anneau unitaire. Montrez que l'ensemble des unités muni de la multiplication est un groupe, i.e. montrez que $(A^*, \cdot)$ est un groupe.

(b) Décrivez $(\mathbb{Z}/10\mathbb{Z})^*$ et $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^*$.

(c) Soient R et S deux anneaux unitaires. Montrez ou trouvez un contre-exemple à l'affirmation suivante : $(R \times S)^* = R^* \times S^*$.