UNIVERSITÉ DE FRIBOURG
UNIVERSITÄT FREIBURG

Cours du Prof. Dr. Anand Dessai ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE II

Rafael Guglielmetti, Nicolas Weisskopf

SÉRIE 5

À rendre avant le jeudi 27 mars, 16h

Exercice 0

Soit X un espace topologique. Montrez que X est connexe si et seulement si $\emptyset$ et X sont les uniques sous-espaces de X qui sont à la fois fermés et ouverts dans X.

Exercice 1 (Espaces normaux)

1.) Montrez que si X est un espace compact Hausdorff, alors X est normal.

2.) Montrez que si X est normal et $A \subset X$ est fermé, alors X/A est normal.

3.) Montrez que si X est un espace compact Hausdorff, alors le cône

$$CX = (X \times I)/(X \times \{1\})$$

est homéomorphe au compactifié d'Alexandrov de $X \times [0, 1)$.

Exercice 2 (Sphère et tore)

Montrez que la sphère S^2 et que le tore $S^1 \times S^1$ sont des espaces connexes.

Exercice 3 (Propriétés des espaces connexes)

1.) Montrez que X est connexe si et seulement si toute application continue $X \to \mathbb{Z}$ est constante. Déduisez que le groupe $O(n)$ n'est pas connexe.

2.) Soient X un espace topologique et $A_\alpha \subset X$, $\alpha \in J$, des sous-espaces connexes. Montrez que si $A_\alpha \cap A_\beta \neq \emptyset$, $\forall \alpha, \beta \in J$, alors $\cup_{\alpha \in J} A_\alpha$ est connexe.

Exercice 4 (Espaces connexes)

1.) Soit $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x = 0 \text{ ou } y = 0 \text{ ou } y = \frac{1}{x} \text{ avec } x \neq 0\}$. Est-ce que X est connexe ?

2.) Soient $X_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y = \sin(\frac{1}{x}),\, x > 0\}$, $X_2 = \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y \in [-1, 1]\}$ et $Y = X_1 \cup X_2$. Montrez que Y est connexe mais n'est *pas* connexe par arcs. L'espace X_1 est communément appelé le *sinus du topologue*.