UNIVERITÉ DE FRIBOURG SUISSE
UNIVERSITÄT FREIBURG SCHWEIZ **DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES**

Cours du Prof. Dr. Anand Dessai ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE I

Rafael Guglielmetti, Nicolas Weisskopf

SÉRIE 5

À rendre avant le jeudi 24 octobre, 16h00

VRAI OU FAUX :

1.) Soient G un groupe, H et K deux sous-groupes de G tels que $K \triangleleft H$ et $H \triangleleft G$. Alors, $K \triangleleft G$.

2.) Soient G un groupe résoluble et H un sous-groupe de G. Alors, H est résoluble.

3.) A_4 est résoluble.

Exercice 0
Soient p et q deux nombres premiers. Alors, tout groupe d'ordre pq n'est pas simple.

Exercice 1 (Commutateurs)

i) Montrez que $[D_5, D_5] = \{e, \sigma, \sigma^2, \sigma^3, \sigma^4\}$ et identifiez $D_5/[D_5, D_5]$.

ii) Montrez que $[D_6, D_6] = \{e, \sigma^2, \sigma^4\}$ et identifiez $D_6/[D_6, D_6]$.

iii) Montrez que $[A_4, A_4] = V_4$ et identifiez $A_4/[A_4, A_4]$.

iv) Soit G un groupe abélien. Calculez $[G, G]$ et identifiez $G/[G, G]$.

Exercice 2 (Sous-groupes de $\mathbb{Z}$)
On considère le groupe $(\mathbb{Z}, +)$. On a montré que tout sous-groupe de $\mathbb{Z}$ est de la forme $m\mathbb{Z}$ pour un nombre naturel $m \in \mathbb{N}$.

a) Soient r et s deux nombres naturels. Montrez que

$$r\mathbb{Z} \cap s\mathbb{Z} = \mathrm{ppmc}(r, s)\,\mathbb{Z} \quad \text{et} \quad r\mathbb{Z} + s\mathbb{Z} = \mathrm{pgdc}(r, s)\,\mathbb{Z},$$

où $r\mathbb{Z} + s\mathbb{Z} = \{rx + sy \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$.

b) Montrez que si $\mathrm{pgdc}(r, s) = 1$, alors $\mathbb{Z}/rs\mathbb{Z}$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/r\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/s\mathbb{Z}$.

(*Indication : Utilisez l'identité de Bézout. Si* $\mathrm{pgdc}(r, s) = d$*, alors il existe deux nombres entiers* a *et* b *tels que* $a \cdot r + b \cdot s = d$*.*)

Le but des deux prochains exercices est de montrer le théorème suivant.

THÉORÈME. *Tout groupe non-abélien d'ordre strictement plus petit que* 60 *n'est pas simple.*

Au cours, on a vu les propositions suivantes.

Proposition
Soient p et q deux nombres premiers distincts.

i) Tout p-groupe d'ordre non premier n'est pas simple. (*corollaire 1.61*)

ii) Tout groupe d'ordre pq n'est pas simple. (*série 5, exercice 0*)

iii) Tout groupe d'ordre p^2q n'est pas simple. (*théorème 1.68*)

Exercice 3 (**2 points**)

a) Listez les cas qui ne sont pas concernés par la proposition (pour démontrer le théorème ci-dessus).

b) Montrez que tout groupe d'ordre 40 admet un unique 5-sous-groupe de Sylow

c) Montrez que tout groupe d'ordre 42 admet un unique 7-sous-groupe de Sylow.

d) Montrez que tout groupe d'ordre 54 admet un unique 3-sous-groupe de Sylow.

Exercice 4 (**6 points**)

a) Montrez que tout groupe d'ordre 30 admet soit un unique 5-sous-groupe de Sylow, soit un unique 3-sous-groupe de Sylow.

b) Montrez que tout groupe d'ordre 56 admet soit un unique 7-sous-groupe de Sylow, soit un unique 2-sous-groupe de Sylow.

c) Montrez que tout groupe G d'ordre 24 ou 48 admet soit un unique 2-sous-groupe de Sylow, soit un homomorphisme non-trivial de G dans S_3 dont le noyau nous fournit un sous-groupe normal de G.

(*Indication : s'il existe plus qu'un* 2*-Sylow, en choisir un, disons P, et laisser agir le groupe G par multiplication à gauche sur l'ensemble quotient G/P.*)

d) Montrez que tout groupe G d'ordre 36 admet soit un unique 3-sous-groupe de Sylow, soit un homomorphisme non-trivial de G dans S_4 dont le noyau nous fournit un sous-groupe normal de G.