Cours du Prof. Dr. Anand Dessai ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE II

Rafael Guglielmetti, Nicolas Weisskopf

SÉRIE 4

À rendre avant le jeudi 20 mars, 16h

Exercice 0
Soit X un espace topologique compact. Montrez que X^+ est la somme topologique de X et d'un point à l'infini.

Exercice 1 (Compactifiés d'Alexandrov)

(a) Décrivez les compactifiés d'Alexandrov de

$$\mathbb{R},\ \ B_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^2 | |x| < 1\},\ \ \overline{B}_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^2 | |x| \leq 1\}.$$

(b) On dit que $U \subset X^+$ est *ouvert dans le compactifié d'Alexandrov de* X si l'une des conditions suivantes est satisfaite :

(i) U est ouvert dans X,

(ii) $U = X^+ - C$ où $C \subset X$ est un sous-ensemble compact.

Montrez que cela définit une topologie sur X^+.

Exercice 2 (Produits d'espaces topologiques, 6 points)
Soient X_1, X_2 et Y des espaces topologiques. On suppose que X_1 et X_2 sont non-vides.

1. Montrez que le produit $X_1 \times X_2$ est compact si et seulement si X_1 et X_2 sont compacts.
2. Montrez que le produit $X_1 \times X_2$ est Hausdorff si et seulement si X_1 et X_2 sont Hausdorff.
3. Montrez que la donnée d'une application continue $f : Y \longrightarrow X_1 \times X_2$ est équivalente à la donnée d'une paire d'applications continues $f_1 : Y \longrightarrow X_1$ et $f_2 : Y \longrightarrow X_2$.

Exercice 3 (Graphe d'une application)
Soit $f : X \to Y$ une application entre deux espaces topologiques.

(a) Montrez que si f est continue et Y Hausdorff, alors le graphe

$$G_f := \{(x, f(x)) \in X \times Y | x \in X\}$$

est fermé dans $X \times Y$.

(b) Inversement, montrez que si G_f est fermé et Y compact, alors f est continue.

Exercice 4 (2 points)
Soit $Y = \{p, q\}$ muni de la topologie grossière $\mathcal{O} = \{\emptyset, Y\}$, $\mathbb{N}_{>0} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ muni de la topologie discrète et $X := Y \times \mathbb{N}_{>0}$ muni de la topologie produit. Montrez que chaque sous-ensemble non vide $A \subset X$ a un point d'accumulation.

Exercice 5 (Infinité de nombres premiers, bonus, 4 points)
Le but de cet exercice est de montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers en considérant une topologie sur $\mathbb{Z}$.
Pour $a \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $b \in \mathbb{Z}$, on définit l'ensemble

$$Z_{a,b} = \big\{an + b : n \in \mathbb{Z}\big\} \subset \mathbb{Z}.$$

1. Montrez que l'ensemble $\mathcal{T}$ constitué de $\emptyset$ et des unions d'ensembles $Z_{a,b}$ définit une topologie sur $\mathbb{Z}$.
2. Montrez que tous les ouverts sauf $\emptyset$ possèdent une infinité d'éléments.
3. Supposons que l'ensemble $\mathbb{P}$ des nombres premiers soit fini, disons $\mathbb{P} = \{p_1, \ldots, p_r\}$. Ecrivez $\mathbb{Z} \setminus \{-1, 1\}$ à l'aide des ensembles Z_{p_i,b_i}.
4. Trouvez une contradiction.