Cours du Prof. Dr. Anand Dessai

Rafael Guglielmetti, Nicolas Weisskopf

ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE I

SÉRIE 4

À rendre avant le jeudi 17 octobre, 16h

VRAI OU FAUX :

1. $D_3 \cong S_3$.
2. Soient G un groupe fini et m un nombre qui divise l'ordre du groupe. Alors, il existe un sous-groupe de G d'ordre m.
3. Soit G un groupe abélien. Alors, tout sous-groupe de G est normal.

Exercice 0
Soient G un groupe abélien fini et p un nombre premier.

1. Il existe un unique p-sous-groupe de Sylow de G.
2. Montrer que $P := \{x \in G \mid \mathrm{ord}(x) \text{ est une puissance de } p\}$ est un p-sous-groupe de Sylow de G.

Exercice 1 (Quelques groupes d'ordre particulier)
Utiliser les théorèmes de Sylow pour montrer que :

(a) tout groupe d'ordre 141 est cyclique ;

(b) tout groupe d'ordre 45 est abélien ;

(c) tout groupe d'ordre 40 n'est pas simple.

Exercice 2 (Groupes d'ordre $2p$)
Soient p un nombre premier et G un groupe d'ordre $2p$. Montrez que $G \cong D_p$, le groupe diédral à $2p$ éléments, ou $G \cong \mathbb{Z}/2p\mathbb{Z}$.

Exercice 3 ($\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$)
Soit p un nombre premier.

1. Montrez que $\mathrm{ord}(\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)) = \prod_{i=0}^{n-1}(p^n - p^i)$.
2. Calculez l'ordre de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{F}_p)$.
3. On considère le sous-groupe P de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$ défini par

$$P := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & & \star \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p) \right\}.$$

   Montrez que P est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$ et que P est un p-sous-groupe de Sylow de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$.

Exercice 4
Soit S_n le groupe symétrique et D_n le groupe diédral (i.e. le groupe des isométries d'un n-gone régulier).

(a) Montrez que pour $n \geq 3$, il existe un homomorphisme de groupe injectif $i : D_n \hookrightarrow S_n$.

(b) Explicitez l'image de D_4 dans S_4.

(c) Montrez que $i(D_4)$ est un 2-sous-groupe de Sylow de S_4.

(d) Calculez le nombre de 2-sous-groupes de Sylow de S_4. Que peut-on dire de la normalité de $i(D_4)$?