UNIVERSITÉ DE FRIBOURG
UNIVERSITÄT FREIBURG

Cours du Prof. Dr. Anand Dessai | ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE II
Rafael Guglielmetti, Nicolas Weisskopf

SÉRIE 3

À rendre avant le jeudi 13 mars, 16h

Exercice 0
Soit X un espace topologique. Soient $D \subset X$ un sous-espace fermé et $C \subset D$ un sous-espace fermé. Montrez que C est fermé dans X.

Exercice 1 (Espaces Hausdorff)

1.) Soit X un espace topologique. Montrez que X est Hausdorff si et seulement si la diagonale
$$\Delta(X) = \{(x, x) \in X \times X \mid x \in X\}$$
est fermée dans $X \times X$.

2.) Montrez que l'espace $\mathbb{R}$ muni de la topologie standard est Hausdorff. Qu'en est-il pour la topologie cofinie et la topologie grossière ?

Exercice 2 (Espaces compacts)

1.) Montrez qu'un espace topologique X est compact si et seulement si pour toute famille de fermés A_i, $i \in J$, telle que $\bigcap_{i \in J} A_i = \emptyset$, il existe $i_1, \ldots, i_r$ tels que
$$A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_r} = \emptyset.$$

2.) Montrez qu'une union finie d'ensembles compacts est compacte. Est-ce que toute union d'ensembles compacts est compacte ?

Exercice 3 (Espaces non-compacts)
On considère la topologie standard de $\mathbb{R}^n$. En utilisant la *définition topologique* de compacité, montrez que les espaces suivants ne sont pas compacts
$$\mathbb{R}^n, \quad \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad (0, 1], \quad \mathbb{Q} \cap [0, 1].$$

Exercice 4 (Lemme du tube)
Soient X un espace topologique, Y un espace topologique compact et $N \subset X \times Y$ un voisinage ouvert de $\{x_0\} \times Y$. Montrez que N contient un voisinage ouvert de $\{x_0\} \times Y$ de la forme $W \times Y$. Un tel voisinage est appelé un *tube* autour de $\{x_0\} \times Y$.

Exercice 5 (Bonus, 2 pts)
On considère les groupes de matrices $O(n, \mathbb{R})$ et $SL(n, \mathbb{R})$ avec la topologie induite de $\mathbb{R}^{n^2}$. Montrez que $O(n, \mathbb{R})$ est compact, mais que $SL(n, \mathbb{R})$ n'est pas compact pour $n > 1$.

Indication : Pour $O(n, \mathbb{R})$, trouvez une bonne caractérisation des matrices. Pour $SL(n, \mathbb{R})$, trouvez une suite qui n'est pas bornée. Ensuite, utilisez Heine-Borel.