
Cours du Prof. Dr. Anand Dessai

Rafael Guglielmetti, Nicolas Weisskopf

ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE I

SÉRIE 3

À rendre avant le jeudi 10 octobre, 16h

VRAI OU FAUX :

1. Soient $n \in \mathbb{N}_{>0}$ et G un groupe. Alors $\{g \in G : g^n = e\}$ est un sous-groupe de G.
2. Tout sous-groupe d'un groupe cyclique est cyclique.
3. Tout groupe d'ordre 37 est abélien.

Exercice 0
Décrivez l'action du groupe diédral D_n sur les sommets d'un n-gone. Quelles sont les orbites ?

Exercice 1
Soit $\mathbb{K}$ un corps et $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) := \{A \in \mathrm{M}(n \times n; \mathbb{K}) \,|\, \det(A) \neq 0\}$ le **groupe général linéaire**. On considère le sous-groupe $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K}) := \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \,|\, \det(A) = 1\}$, appelé **groupe spécial linéaire**.

(a) Décrivez les classes à gauche $A \cdot \mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$, où $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

(b) Montrez que $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K}) \lhd \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

(c) À l'aide de la propriété universelle du quotient, identifiez le quotient $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})/\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$.

(d) Montrez que $\mathrm{GL}_{42}(\mathbb{F}_5)/\mathrm{SL}_{42}(\mathbb{F}_5)$ est un groupe d'ordre 4.
(*Rappel : Pour un nombre premier p, le corps $\mathbb{F}_p$ est défini comme étant $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ muni de l'addition et multiplication modulo p.*)

Exercice 2
Soit $\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$. Pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ et $z \in \mathcal{H}$, on définit $A * z := \frac{az+b}{cz+d}$.

1. Montrez que cela définit une action de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ sur $\mathcal{H}$.
2. Quelle est l'orbite de $i \in \mathcal{H}$?
3. Quel est le stabilisateur de $i \in \mathcal{H}$?

Exercice 3
Soient G un groupe et X un ensemble.

1. Montrez que la donnée d'une action de groupes de G sur X est équivalente à la donnée d'un homomorphisme $G \longrightarrow \big(\mathrm{Bij}(X), \circ\big)$.
2. Supposons maintenant que G est fini. Montrez que G est isomorphe à un sous-groupe de S_n avec $n \geq |G|$.
   Remarque : Ce résultat est appelé *théorème de Cayley*.

Exercice 4 1. Soit G un groupe. Montrez que si $G/Z(G)$ est cyclique, alors G est abélien.

2. Montrez que tout groupe d'ordre p^2 est abélien.
   Remarque : On peut déduire de cela, mais on ne vous demande pas de le faire pour l'instant, que tout groupe d'ordre p^2 est isomorphe à $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

3. Est-ce que le résultat du point précédent est vrai pour les groupes d'ordre p^3 ?