Cours du Prof. Dr. Anand Dessai

Rafael Guglielmetti, Nicolas Weisskopf

ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE II

SÉRIE 2

À rendre avant jeudi 6 mars, 17h00

Exercice 0 (Métrique discrète)
Soit X un ensemble. On définit l'application suivante :

$$d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq y \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrez que d définit une distance sur X. Quelles sont les boules ouvertes pour cette métrique ?

Exercice 1 (Convergence uniforme)
Soit X un espace topologique et Y un espace métrique. Une suite d'applications $f_n : X \to Y$ **converge uniformément** vers une application $f : X \to Y$ si, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $x \in X$ et tout $n \geq N_\varepsilon$ on a $d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$.

Montrez que si les f_n sont continues, alors f est continue.

Exercice 2 (Une autre caractérisation de la continuité)
Soient X et Y deux espaces métriques et $f : X \to Y$ une application. Montrez que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) f est continue (pour la topologie métrique).

(ii) Pour tout $x \in X$ et toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ telle que $\lim_{n \to \infty} x_n = x$, implique $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x)$.

Indication : dans cet exercice, il faut utiliser le lemme suivant :

$$U \textit{ est ouvert si et seulement si } \forall u \in U, \exists \varepsilon > 0 \textit{ tel que } B_\varepsilon(u) \subseteq U.$$

Commencez par montrer (i) implique (ii). Pour montrer que (ii) implique (i) supposez par l'absurde qu'il existe $V \subset Y$ ouvert tel que $f^{-1}(V)$ n'est pas ouvert. Pour arriver à une contradiction, utilisez le lemme ci-dessus pour construire une suite (x_n) telle que $(x_n) \not\subset f^{-1}(V)$, mais $\lim_{n \to \infty} x_n = x$ pour un certain $x \in f^{-1}(V)$. Montrez que ceci contredit le fait que V est ouvert.

Définition 1 (Norme L^p)
Soit $p \in [1, \infty[$ et soit

$$C_c^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ une fonction continue à support borné}\}.$$

On appelle support de f l'adhérence de l'ensemble des points en lesquels la fonction f ne s'annule pas.

On définit une norme sur l'espace vectoriel $C_c^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ de la manière suivante : si $f \in C_c^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, alors

$$\|f\|_p = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

Exercice 3 (Normes L^2 et L^1)
Soit $V = C_c^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ munit des normes L^1 et L^2. Trouvez une suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset V$ qui converge vers la fonction nulle en norme L^2 mais pas en norme L^1. En déduire que les deux normes ne sont pas équivalentes.

Exercice 4 (Distance à un ensemble)
Soit X un espace métrique munit d'une métrique d et $A \subset X$. Pour tout $x \in X$ on définit

$$d(x, A) := \inf\{d(x, a) \mid a \in A\}.$$

Montrez que :

(a) l'application $X \to \mathbb{R}, x \mapsto d(x, A)$ est continue ;

(b) $d(x, A) = 0$ si et seulement si $x \in \overline{A}$.

L'**adhérence** de A, notée $\overline{A}$, est définie comme étant l'intersection de tous les ensembles fermés contenant A, i.e.

$$\overline{A} = \bigcap \{F \mid A \subseteq F, F \text{ est fermé}\}.$$