Cours du Prof. Dr. Anand Dessai ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE I

Rafael Guglielmetti, Nicolas Weisskopf

SÉRIE 2

À rendre avant le jeudi 3 octobre, 16h

VRAI OU FAUX :

1.) Dans $\mathbb{Z}$, il existe 15 sous-groupes qui contiennent $144\mathbb{Z}$.

2.) Soit G un groupe d'ordre $|\text{ord}(G)| < 6$. Alors, G est abélien.

3.) Soit $\sigma = (i_1 i_2 \dots i_k) \in S_n$ un k-cycle et $\tau \in S_n$. Alors, $\tau\sigma^{-1}\tau = (\tau(i_1)\tau(i_2)\dots\tau(i_k))$.

Exercice 0
Soit G un groupe fini et $x \in G$. Montrez que

$$x^{\text{ord}(G)} = e.$$

Exercice 1 ($A_3 \triangleleft S_3$)
Soit $A_3 \subset S_3$ le groupe alterné.

a) Calculez toutes les classes à gauche de A_3 dans S_3. Concluez que S_3 peut être représenté comme réunion disjointe des classes à gauche et que A_3 est un sous-groupe normal de S_3.

b) Donnez un groupe K et un homomorphisme de groupes $\varphi : S_3 \to K$ tel que $\ker(\varphi) = A_3$. Concluez que A_3 est un sous-groupe normal de S_3.

c) Soit G un groupe quelconque et H un sous-groupe d'indice 2. Montrez que H est un sous-groupe normal de G.

Exercice 2 (Centre et automorphismes intérieurs)
Soit G un groupe fini. On définit le centre $Z(G)$ du groupe G par

$$Z(G) = \{z \in G \mid xz = zx, \forall x \in G\}$$

et l'ensemble des automorphismes intérieurs $\text{Inn}(G)$ par

$$\text{Inn}(G) = \{\varphi : G \to G \mid \exists g \in G : \varphi(x) = gxg^{-1}, \forall x \in G\}.$$

a) Montrez que $Z(G)$ forme un sous-groupe normal abélien de G.

b) Soit $\text{Aut}(G)$ le groupe des automorphismes de G. Montrez que $\text{Inn}(G)$ est un sous-groupe normal de $\text{Aut}(G)$.

c) Montrez que $G/Z(G)$ est isomorphe à $\text{Inn}(G)$.

Exercice 3 (Homomorphismes)
Soient G et H deux groupes.

a) Soit $\varphi : G \to H$ un homomorphisme de groupes. Montrez que $\varphi(G)$ est un sous-groupe de H.

b) Soit G un groupe à 33 éléments et H un groupe à 70 éléments. Montrez que chaque homomorphisme $\varphi : G \to H$ est trivial (i.e. $\varphi(x) = e \; \forall x \in G$).

Exercice 4 (Classification des groupes cycliques finis)
Soit G un groupe cyclique fini d'ordre m pour un nombre naturel $m \in \mathbb{N}_{>0}$. Montrez alors que G est isomorphe à $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.