Cours du Prof. Dr. Anand Dessai ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE II

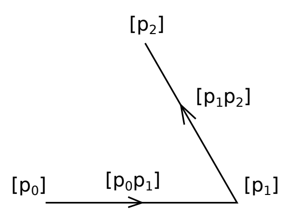
Rafael Guglielmetti, Nicolas Weisskopf

SÉRIE 1

À rendre avant le jeudi 27 février, 16h

Exercice 0
Soit X un espace topologique et soit $A \subset X$ un sous-ensemble. On suppose que pour tout $x \in A$ il existe un ouvert U qui contient x tel que $U \subset A$. Montrez que A est un ouvert.

Exercice 1 (*Homologie simpliciale*)
Soit X le complexe simplicial suivant :

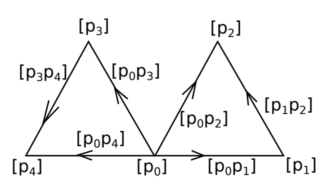


Calculez le noyau et l'image de

$$\partial_1 : C_1(X) = \mathbb{Z}[p_0p_1] \oplus \mathbb{Z}[p_1p_2] \longrightarrow \mathbb{Z}[p_0] \oplus \mathbb{Z}[p_1] \oplus \mathbb{Z}[p_2] = C_0(X).$$

Déterminez $H_i(X)$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$.

Exercice 2 (*Homologie simpliciale*)
Soit X le complexe simplicial suivant :



Calculez le noyau et l'image de

$$\partial_1 : C_1(X) = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{Z}[p_0p_1] \oplus \mathbb{Z}[p_1p_2] \oplus \mathbb{Z}[p_0p_2] \oplus \\ \mathbb{Z}[p_0p_3] \oplus \mathbb{Z}[p_3p_4] \oplus \mathbb{Z}[p_0p_4] \end{array} \right. \longrightarrow C_0(X) = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{Z}[p_0] \oplus \mathbb{Z}[p_1] \oplus \mathbb{Z}[p_2] \oplus \\ \mathbb{Z}[p_3] \oplus \mathbb{Z}[p_4]. \end{array} \right.$$

Déterminez $H_0(X)$ et $H_1(X)$.

Exercice 3 (*Topologie cofinie*)
Sur un ensemble X, on dit qu'un sous-ensemble U de X est ouvert pour la *topologie cofinie* si le complément $X - U$ est fini ou $U = \emptyset$.

a) Montrez que X muni de la topologie cofinie est un espace topologique.

b) Pour $X = \mathbb{R}$, montrez que la topologie standard est *plus fine* que la topologie cofinie, i.e. tout sous-ensemble ouvert dans la topologie cofinie est un sous-ensemble ouvert dans la topologie standard.

c) Trouvez un sous-ensemble ouvert de la topologie standard de $\mathbb{R}$ qui n'est pas ouvert pour la topologie cofinie.

Exercice 4 (*Homéomorphismes*)

a) Soit $f : [0,1] \cup]2,3] \to [0,2]$ l'application définie par

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \in [0,1], \\ x-1, & \text{si } x \in]2,3]. \end{cases}$$

Montrez que f est une application bijective et continue, mais pas un homéomorphisme.

b) Soit $(a,b) \subset \mathbb{R}$ un interval ouvert. Montrez que l'interval (a,b) est homéomorphe à $\mathbb{R}$.