Cours du Prof. Dr. Anand Dessai — ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE I

Nicolas Weisskopf, Rafael Guglielmetti

SÉRIE 1

À rendre avant le jeudi 26 septembre, 16h

Exercice 0
Montrez que l'ensemble

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M(2 \times 2; \mathbb{Q}) \mid ad - bc = 1 \right\}$$

muni du produit matriciel est un groupe.
Le groupe est-il abélien ?

Exercice 1 (Des groupes abéliens)
Soit G un groupe.

1. Montrer que si G est un groupe tel que $x^2 = e$, pour tout $x \in G$, alors G est abélien.
2. Montrer que si G est un groupe fini abélien, alors

$$\prod_{x \in G} x^2 = e.$$

Exercice 2 (Encore des matrices)
Montrez que l'ensemble

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in M(2 \times 2; \mathbb{R}) \mid a^2 + b^2 \neq 0 \right\}$$

muni du produit matriciel est un groupe.
Le groupe est-il abélien ?
Remarque : Il est possible d'identifier ce groupe avec un groupe bien connu. Voyez-vous lequel ?

Exercice 3
Soit $\mathbb{R}\backslash\{5\}$ muni de la loi

$$\begin{array}{rccl} * : & \mathbb{R}\backslash\{5\} \times \mathbb{R}\backslash\{5\} & \longrightarrow & \mathbb{R}\backslash\{5\} \\ & (x, y) & \longmapsto & x * y := xy - 5x - 5y + 30\,. \end{array}$$

Est-ce que $(\mathbb{R}\backslash\{5\}, *)$ est un groupe ? Justifiez !

Exercice 4 (Union de sous-groupes)
Soit G un groupe et soient H_1, H_2 des sous-groupes de G. Montrez que $H_1 \cup H_2$ est un sous-groupe de G si et seulement si $H_1 \subset H_2$ ou $H_2 \subset H_1$.

Exercice 5 (Isomorphismes)

1. On considère le groupe $\mathbb{C}^*$.
   (a) Montrez que $G = \{1, -1, i, -i\}$ est un sous groupe de $\mathbb{C}^*$.
   (b) Montrez que $G \cong \mathbb{Z}_4 = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$
2. Soit G un groupe d'ordre 4. Montrez que G est isomorphe à $\mathbb{Z}_4$ ou $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.