Cours du Prof. Dr. Anand Dessai — ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE I

Nicolas Weisskopf, Rafael Guglielmetti

SÉRIE 0

Exercice 1
Pour chacun des couples $(G, *)$, où G est un ensemble et $*$ est une loi de composition sur G, montrez que $(G, *)$ est un groupe.
Remarque : Si cela n'est pas évident, il faut vérifier que la loi est bien une loi interne !

1. $(\mathbb{R}, +)$.
2. $\big(\mathrm{Bij}(X), \circ\big)$, où X est n'importe quel ensemble et $\mathrm{Bij}(X)$ est l'ensemble des bijections de X dans lui même.
3. $\big(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +\big)$.
4. $\big(\mathbb{Z}_{(p)}, +\big)$, où $\mathbb{Z}_{(p)} = \big\{\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} : p \nmid b\big\}$ avec p un nombre premier.

Définition 1 (Groupe symétrique)
Dans le cas $\big(\mathrm{Bij}(X), \circ\big)$ où $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ on note le groupe S_n et on l'appelle le *groupe symétrique*.

Exercice 2 (Sous groupes de $\mathbb{Z}$)
Déterminez tous les sous-groupes de $\mathbb{Z}$.

Exercice 3
Soit n un entier. Trouvez un groupe d'ordre n.

Exercice 4 (Sous groupes de S_3)
Trouvez tous les sous-groupes de S_3.