

Variationsrechnung 2012–2013

Inhaltsverzeichnis

1. Einführung

Beispiele für Funktionale, Fragestellung, indirekte und direkte Methoden, Minimalfolgen, jede folgen-unterhalbstetige beschränkte Funktion auf einem folgenkompakten Raum hat ein Minimum

2. Euler-Lagrange-Gleichungen

Erste Variation und schwache lokale Minima, Fundamentallemma, Euler-Operator und Extremalen; Beispiele: gewichtete Länge, Hamilton-Prinzip, lokale C^1 -Minima sind nicht immer C^2 , ein Minimalproblem mit unendlich vielen Lösungen; Lemma von Du Bois-Reymond, verbesserte Version des Fundamentallemmas: C^1 -Extremalen lösen die Euler-Lagrange-Gleichungen

3. Freie Randbedingungen

Natürliche Randbedingungen, freie Ränder auf Untermannigfaltigkeiten, Transversalität

4. Erhaltungssätze und Satz von Noether

Erhaltungsgrößen, Lagrangefunktion F unabhängig von t , Beispiel Energieerhaltung; Satz von Noether: kleine Version, Beispiele: Massenpunkt im symmetrischen Potential, Erhaltung von Impuls und Drehimpuls; Erhaltungsgrößen beim n -Körperproblem; Satz von Noether: allgemeinere Version

5. Variationsprobleme mit Nebenbedingungen

Lagrange-Multiplikatoren bei isoperimetrischen Nebenbedingungen, Beispiele: Sturm-Liouville, das klassische isoperimetrische Problem in der Ebene, die hängende Kette; holonome Nebenbedingungen, tangentielle und normale Vektorfelder längs u , Lagrange-Multiplikatoren bei holonomen Nebenbedingungen, Beispiel kürzeste Linien auf Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^n ; nichtholonome Nebenbedingungen (Lagrange-Problem), hängende Kette als Lagrange-Problem, Variationsprobleme höherer Ordnung und isoperimetrische Probleme als Lagrange-Probleme

6. Extremalfelder

Kalibratoren und Null-Lagrangefunktionen, Felder und ihre Steigungsfunktionen, Extremalfelder, Optimalfelder und Eikonale; Caratheodory-Gleichungen und Mayerfelder, Zusammenhang zwischen Optimalfeldern und Mayerfeldern, Exzessfunktion, Konvexität, hinreichende Bedingung für starkes lokales Minimum

7. Mayerfelder und Eikonale

Beispiele für Mayerfelder und Niveauflächen des Eikonals: Längenfunktional, geometrische Optik, kinetische Energie; Integrabilitätsbedingungen, Beltrami-Form γ_F

und ihre Anwendung auf Caratheodory-Gleichungen und Mayerfelder, Berechnung von $e^*d\gamma_F$; Mayerfelder als Extremalenfeldern mit verschwindenden Lagrangeklammern, Zentralfelder (= stigmatische Extremalenfelder)

8. Einbettung von Extremalen und Jacobifelder

Annahme F_{pp} invertierbar; nichtsinguläre C^1 -Extremalen sind C^2 ; lokale Konstruktion von Zentralfeldern, kleine Abschnitte von Extremalen sind starke lokale Minima; Beispiel Geodätische auf Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^n ; Beispiel: Zentralbündel für das Problem der Minimal-Rotationsfläche; Jacobi-Operator und Jacobifelder; Jacobifelder und 1-Parameterfamilien von Extremalen; Kriterien für konjugierte Punkte; Einbettung nichtsingulärer Extremalen in Zentralfelder, hinreichende Bedingungen für starke lokale Extrema

9. Jacobifelder und zweite Variation

Zweite Variation, akzessorische Lagrangefunktion und akzessorisches Funktional \mathcal{A} , die Eulergleichung für \mathcal{A} ist die Jacobigleichung, Jacobis notwendige Bedingung für schwache lokale Minima

10. Epilog: Existenz von Minima

Direkte Methode, Halbstetigkeitssatz von Tonelli, Existenzsatz von Tonelli

Beispiele für Examensfragen

Déterminer les extrémales de la fonctionnelle $\mathcal{F}(u) = \dots$

Donner un exemple pour \dots

Qu'est-ce qu'un point conjugué ?

Quel est le rôle des points conjugués dans la construction des champs centrales ?

Expliquer la condition nécessaire de Jacobi.

Quel est le lien entre les champs de Jacobi et la deuxième variation ?

Qu'est-ce que le théorème de Noether ? Preuve ?

Quelles sont les quantités conservées pour le problème à n corps ?

Quelles sont les quantités conservées pour la fonctionnelle $\mathcal{F}(u) = \dots$?

Qu'est-ce que la forme de Beltrami ? Pour quoi sert-elle ?

Qu'est-ce que le lemme de Du Bois-Reymond ? Preuve ?

Peut-on le généraliser ?

Qu'est-ce que la fonction excès ? Quel rôle joue-t-elle ?

Expliquer la méthode des multiplicateurs de Lagrange.

Comment peut-on traiter le problème de la chaîne suspendue comme un problème de Lagrange ?

Quel est le lien entre les champs optimaux et les champs de Mayer ?

Comment construire des champs de Mayer ? Comment trouver l'eikonal S ?

Quel est le lien entre les calibrateurs et les champs d'extrémales ?

Qu'est-ce qu'une fonction semi-continue ? Pourquoi ne pas utiliser des fonctions continues ?

⋮