5. Integration über Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$ (264-355)

Parametrisierte Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$, Immersionen, Tangentialraum, Einbettungen; Beispiele: Rotationsflächen, Graphen, Bildmengen von Einbettungen sind Untermannigfaltigkeiten, lokale Normalform von Immersionen; Beispiel einer injektiven Immersion, die keine Einbettung ist; Parameterwechsel $\psi_2 \circ T = \psi_1$; Volumen von d-Parallelotopen im $\mathbb{R}^n$: $\mathrm{vol}_d(P(a_1, \ldots, a_d)) = \sqrt{\det(A^T A)}$, Änderung des Volumens bei linearen Abbildungen, äusseres Produkt und vol_{n-1}; Masstensor = metrischer Tensor einer Parametrisierung, Definition des Integrals von Funktionen über parametrisierte Untermannigfaltigkeiten, Motivation der Definition durch Betrachtung von Riemannsummen, Unabhängigkeit von der Parametrisierung, Spezialfälle und Beispiele; Partitionen der Eins, Integration von Funktionen über beliebige Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$; d-Nullmengen, Lipschitz-Bilder von d-Nullmengen sind d-Nullmengen; Modifikationssatz, Ignorieren von d-Nullmengen bei Integration über d-dimensionale Untermannigfaltigkeiten, Berechnung von Integralen durch Zerlegung in parametrisierte Untermannigfaltigkeiten; Integration über Untermannigfaltigkeiten mit Singularitäten; Einheitsnormalenfelder und orientierte Hyperflächen, Möbiusband, Berechnung von Einheitsnormalen für reguläre Niveaumengen und für parametrisierte Untermannigfaltigkeiten; C^1-glatt berandete Teilmengen $G \subseteq \mathbb{R}^n$, C^1-Polyeder, regulärer Rand $\partial_r G$, äussere Normale $\nu : \partial_r G \to \mathbb{R}^n$; Integralsatz von Gauss = Divergenzsatz; Beispiele und Anwendungen zum Divergenzsatz: Divergenz als Quelldichte, Volumenberechnung, Gausssches Gesetz der Elektrostatik, Archimedisches Prinzip, Greensche Identitäten, Integralsatz von Green (n=2), Flächenformel von Leibniz, die inhomogene Integralformel von Cauchy, Wirtinger-Ableitungen; Integrallkurven und der Fluss eines Vektorfeldes, Satz über die Glattheit des Flusses, Zustandsabbildungen, vollständige Vektorfelder, Zusammenhang zwischen der Volumenänderung durch den Fluss und der Divergenz des Vektorfeldes: Satz von Liouville

Königsberger II, Kapitel 11, 12

6. Harmonische Funktionen und Dirichletproblem (356-430)

Laplaceoperator, harmonische und subharmonische Funktionen, Dirichletsche Randbedingung und Dirichletproblem, Neumannsche Randbedingung; physikalische Interpretation: Gleichgewichts-Temperaturverteilung; Mittelwerteigenschaft harmonischer Funktionen, starkes Maximumprinzip für harmonische Funktionen, schwaches Maximumprinzip, Eindeutigkeit der Lösung des Dirichletproblems, Ungleichung von Harnack, $u(x_1) \leq 3\, u(x_2)$; Fundamentallösung für den Laplaceoperator, radialsymmetrische harmonische Funktionen, Darstellungsformel von Green, Greensche Funktion, Eigenschaften der Greenschen Funktion: Symmetrie, Darstellungsformel; Inversion an Sphären, die Greensche Funktion von Bällen, Integralformel von Poisson, Lösung des Dirichletproblems für harmonische Funktionen auf Bällen, Anwendung: Umkehrung der Mittelwerteigenschaft; lokal gleichmässige Limites harmonischer Funktionen sind harmonisch, Konvergenzsatz von Harnack für monotone Folgen harmonischer Funktionen, Abschätzung der Ableitungen harmonischer Funktionen, Satz von Liouville: beschränkte harmonische Funktionen auf $\mathbb{R}^n$ sind konstant, Verallgemeinerung auf Funktionen mit polynomialem Wachstum; Satz von Arzela-Ascoli, Satz von Montel für harmonische Funktionen; subharmonische Funktionen und Mittelwertungleichung, Eigenschaften, harmonischer Lift, die Perronlösung des Dirichletproblems; hebbare Singularitäten harmonischer Funktionen, Beispiel für ein unlösbares Dirichletproblem; Randverhalten der Perronlösung: Barrieren, Δ-reguläre Randpunkte, geometrische Kriterien: Ballbedingung, Kegelbedingung, der Fall $n=2$: $C_\xi \neq \{\xi\}$; Ausblick (nicht im Examen): Hilberträume und Poissongleichung

Gilbarg, Trudinger: Elliptic partial differential equations ..., Chapter 2

3. Konforme Abbildungen (431-473)

Holomorphe Funktionen und harmonische Funktionen, konjugiert harmonische Funktion, Beispiele; $\Delta(u \circ f) = |f'|^2 (\Delta u) \circ f$, Wirtinger-Kalkül, Anwendung: Methode zur Lösung des Dirichletproblems; Riemannscher Abbildungssatz, Beispiele konformer (biholomorpher) Abbildungen, Cayley-Abbildung; Satz von Montel für holomorphe Funktionen, normale Familien; holomorphe Logarithmen und Wurzeln, $e^{f(z)} = g(z)$, Dehnungslemma, Beweis des Riemannschen Abbildungssatzes: Eindeutigkeit, Existenzbeweis mittels Montel durch Maximieren von $f'(0)$; Randverhalten beim Riemannschen Abbildungssatz: Jordangebiete, Satz von Caratheodory, Spiegelungsprinzip von Schwarz, holomorphe Erweiterung; Anwendung auf die Topologie: Satz von Schoenflies, Alexander's horned sphere; Riemanns Beweis des Riemannschen Abbildungssatzes via Dirichletproblem: $u(\xi) = \ln|\xi - z_0|$ und $f(z) = (z - z_0)e^{\phi(z)}$, Dirichletprinzip

Fischer, Lieb: Funktionentheorie; Conway: Functions of one complex variable