Königsberger, Analysis 1, 6. Auflage
Königsberger, Analysis 2, 5. Auflage

Analysis I

1. Natürliche Zahlen, vollständige Induktion

Vollständige Induktion, Summen- und Produktzeichen, geometrische Summenformel, rekursive Definitionen, Fibonacci-Folge, Binomialkoeffizienten, Rekursionsformel und Pascalsches Dreieck, binomische Formel
(Königsberger 1, Kapitel 1)

2. Reelle Zahlen

Anordnungsaxiome, archimedische Anordnung, Intervallschachtelung, Vollständigkeitsaxiom (Intervallschachtelungsprinzip), $\sqrt{2}$ ist irrational; Eindeutigkeit von $\mathbb{R}$ als vollständiger, archimedisch angeordneter Körper; Absolutbetrag, obere und untere Schranken, Supremum und Infimum, Existenz des Supremums, $\mathbb{Q}$ ist abzählbar, $\mathbb{R}$ ist nicht abzählbar
(Königsberger 1, Kapitel 2)

3. Komplexe Zahlen

Definition als Paare reeller Zahlen, $\mathbb{R}$ als Teilmenge von C, Konjugation, Betrag, Dreiecksungleichung, geometrische Bedeutung der Addition und der Inversion in der komplexen Zahlenebene, Spiegelung an Kreisen, Fundamentalsatz der Algebra, Berechnung von Quadratwurzeln, Lösen quadratischer Gleichungen, es gibt keine Anordnung auf $\mathbb{C}$
(Königsberger 1, Kapitel 3)

4. Funktionen

Abbildungen und ihre Graphen; injektiv, surjektiv, bijektiv; Komposition von Abbildungen, Umkehrabbildung; Beispiel: Spiegelung an einem Punkt im $\mathbb{R}^2$; Polynome, Division mit Rest, Zerlegung in Linearfaktoren, Identitätssatz für Polynome, reelle Zerlegung reeller Polynome, Interpolationsformel von Lagrange; rationale Funktionen, Pole, Hauptteile und Polynom-Anteil, Partialbruchzerlegung, reelle Partialbruchzerlegung; Möbiustransformationen bilden Kreise und Geraden auf Kreise oder Geraden ab
(Königsberger 1, Kapitel 4; reelle Partialbruchzerlegung: Vorlesung)

5. Folgen

Folgen, Konvergenz und Grenzwert, ε-Umgebung, Einschliessungsregel, Rechenregeln für Folgen, Beispiele für konvergente Folgen und Konvergenzbeweise; monotone Folgen, jede beschränkte monotone Folge konvergiert, rekursive Berechnung von Quadratwurzeln, quadratische Konvergenz; Häufungspunkte von Folgen, Satz von Bolzano-Weierstrass, $\limsup$ und $\liminf$, Cauchyfolgen und Cauchykriterium, Zusammenhang mit der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$, uneigentliche Konvergenz
(Königsberger 1, Kapitel 5)

6. Reihen

Partialsummen, Konvergenz von Reihen, geometrische Reihe, harmonische Reihe; die Glieder einer konvergenten Reihe bilden eine Nullfolge, Reihen mit nicht-negativen Gliedern, Leibniz-Kriterium für alternierende Reihen; absolute Konvergenz, Cauchykriterium für Reihen, Majorantenkriterium, Beispiele, Quotientenkriterium, Wurzelkriterium; Umordnung von Reihen, kleiner Umordnungsatz für absolut konvergente Reihen, bedingt konvergente Reihen, grosser Umordnungssatz ("grosses Assoziativgesetz"), Multiplikation von Reihen (Cauchy-Produkt), summierbare Familien; Potenzreihen, Konvergenzradius und Konvergenzkreis, Formeln zur Berechnung des Konvergenzradius, Beispiele; Entwicklung gegebener Funktionen in Potenzreihen (durch Reduktion auf geometrische Reihe); Multiplikation von Potenzreihen; Abschätzung des Restes einer Potenzreihe im Innern des Konvergenzkreises, Identitätssatz für Potenzreihen
(Königsberger 1, Kapitel 6)

7. Stetigkeit und Grenzwerte von Funktionen

Stetigkeit von Funktionen $f : D \to \mathbb{C}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^n$, Definition (epsilon-delta) und geometrische Deutung, gleichmässige Stetigkeit, Lipschitz-Stetigkeit, Folgenkriterium für Stetigkeit, Rechnen mit stetigen Funktionen: Summe, Produkt, Komposition stetiger Funktionen ist stetig; Zwischenwertsatz; offene, abgeschlossene und kompakte Mengen im $\mathbb{R}^n$, Folgenkriterien für Abgeschlossenheit und für Kompaktheit; stetige Funktionen auf kompakten Mengen: Satz vom Maximum und Minimum, Satz von der gleichmässigen Stetigkeit; punktweise und gleichmässige Konvergenz von Folgen von Funktionen, Supremumsnorm beschränkter Funktionen, der Limes einer gleichmässig konvergenten Folge stetiger Funktionen ist stetig; normal konvergente Reihen konvergieren gleichmässig, normale Konvergenz von Potenzreihen, konvergente Potenzreihen definieren stetige Funktionen; Grenzwerte von Funktionen an Häufungspunkten ihres Definitionsbereiches, Folgenkriterium
(Königsberger 1, Kapitel 7 und 2, Kapitel 1)

8. Exponentialfunktion und trigonometrische Funktionen

Exponentialfunktion als Limes der Exponentialreihe, Additionstheorem, $\exp(z) = \lim(1 + z/n)^n$, die Zahl e, $\exp(z) = e^z$; natürlicher Logarithmus positiver Zahlen; allgemeine Exponentialfunktion a^z, trigonometrische Funktionen, Eulersche Formel $e^{iz} = \cos(z) + i \sin(z)$, Potenzreihen für sin und cos, Definition der Zahl π als Nullstelle von cos, Arcus-Funktionen; Polarkoordinaten komplexer Zahlen, geometrische Deutung der Multiplikation in $\mathbb{C}$ als Drehstreckung
(Königsberger 1, Kapitel 8.1-8.9)

9. Differentialrechnung

Differenzierbarkeit von Funktionen, Ableitung, geometrische Bedeutung, Ableitungsregeln; Ableitung der Umkehrfunktion; Anwendungen: Newtonmethode, Berechnung von Extrema; Mittelwertsatz der Differentialrechnung, Schrankensatz; Kriterien für Lipschitzstetigkeit und Monotonie; Taylorformel mit Rest in Lagrange-Form, Taylorpolynome und Taylorreihe; termweise Differentiation von Potenzreihen, die Taylorreihe einer konvergenten Potenzreihe ist die Potenzreihe selbst, Beispiele für Taylorentwicklungen; Beispiel einer Funktion f, deren Taylorreihe überall konvergiert, aber nicht gegen f; Regel von de l'Hospital, Beispiele; Differentiation von

Folgen und Reihen von Funktionen (Vertauschungssatz); konvexe Funktionen, Kriterium für Konvexität (f' monoton wachsend), Ungleichung von Jensen, Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel, Ungleichung von Young, Ungleichung von Hölder
(Königsberger 1, Kapitel 9, 14.1, Anfang von 14.2)

10. Integralrechnung

Treppenfunktionen, Integral von Treppenfunktionen, Regelfunktionen, Approximationssatz: Regelfunktionen sind Grenzwerte gleichmässig konvergenter Folgen von Treppenfunktionen; Eigenschaften von Regelfunktionen: höchstens abzählbar viele Unstetigkeiten, auf kompakten Intervallen beschränkt; Integration von Regelfunktionen, Mittelwertsatz der Integralrechnung, Stammfunktionen, Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (Beweis für stetige Funktionen), kurze Liste von Stammfunktionen; Integrationstechniken: partielle Integration, Substitution, Beispiel: Flächeninhalt einer Ellipse; Integration rationaler Funktionen durch Partialbruchzerlegung; Integration von Folgen und Reihen (Vertauschungssatz); Riemannsche Summen; L^p-Norm, Ungleichung von Hölder für Integrale; Taylorformel mit Rest in Integralform; uneigentliche Integrale; Differentialgleichungen: Separation der Variablen
(Königsberger 1, Kapitel 11, 14.1, 15.2)

Analysis II

11. Approximation und Fourierreihen

Faltung mit Diracfolgen, Approximationssatz für Diracfolgen; Approximationssatz von Weierstrass; trigonometrische Polynome, Fourierkoeffizienten und Fourierpolynome, Fejérpolynome, Approximationssatz von Fejér; punktweise Konvergenz von Fourierreihen, Satz von Dirichlet, Satz von Carleson; L^2-Skalarprodukt und L^2-Norm, Minimaleigenschaft von Fourierpolynomen, Konvergenz von Fourierreihen in der L^2-Norm, Parsevalsche Gleichung
(Königsberger I, Kapitel 15.5, 16)

12. Topologie metrischer Räume

Metrische Räume, Normen und normierte Räume, Prähilberträume, Ungleichung von Cauchy-Schwarz, Beispiele für normierte und Prähilberträume; Topologien, die Topologie eines metrischen Raumes, äquivalente Metriken, äquivalente Normen, alle Normen auf einem endlichdimensionalen Vektorraum sind äquivalent; topologische Begriffe: Umgebung, innerer Punkt, Randpunkt, Berührungspunkt, Abschluss, dichte Teilmenge; Konvergenz von Folgen, Folgenkriterium für Abgeschlossenheit; Unterraumtopologie und Spurmetrik; Cauchyfolge, vollständiger metrischer Raum, Banachraum, Hilbertraum, Beispiel: der Hilbertsche Folgenraum l^2; Kompaktheit bei metrischen Räumen, Folgenkompaktheit, Satz von Heine-Borel; Beispiel für eine abgeschlossene, beschränkte, aber nicht kompakte Teilmenge eines metrischen Raumes; zusammenhängende metrische Räume
(Königsberger II, Kapitel 1)

13. Stetige Abbildungen metrischer Räume

Stetigkeit, Homöomorphismen, Urbilder offener und abgeschlossener Mengen, Folgenkriterium; Lipschitz-Stetigkeit, Beispiele; stetige lineare Abbildungen, Beispiel einer unstetigen linearen Abbildung, Operatornorm; Eigenschaften stetiger Abbildungen: Bilder kompakter Teilmengen sind kompakt, Satz vom Maximum und Minimum, Satz von der gleichmässigen Stetigkeit, Zwischenwertsatz; wegzusammenhängende Räume, Beispiele, zusammenhängend und lokal wegzusammenhängend impliziert wegzusammenhängend; Fixpunktiteration, Fixpunktsatz von Banach; gleichmässige Konvergenz; die Matrix-Exponentialfunktion und ihre Eigenschaften, Potenzreihen und Matrizen
(Königsberger II, Kapitel 1 und p.107)

14. Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$

Differenzierbarkeit, die Ableitung $Df(a) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{K}$ als lineare Abbildung, Richtungsableitungen, Beispiel: quadratische Formen $f(x) = x^T Ax$; partielle Ableitungen, Jacobimatrix, Gradient, kritische Punkte und lokale Extrema; Hauptkriterium für Differenzierbarkeit: stetig partiell differenzierbar impliziert differenzierbar; Rechenregeln für Ableitungen; Geschwindigkeitsvektor einer Kurve, Kettenregel (erste Version); Tangentialkegel, Gradient ist orthogonal zu Niveaumenge; Mittelwertsatz, Schrankensatz, Länge von Kurven, $f(b)-f(a) = \int_\alpha^\beta Df(\gamma(t))\dot\gamma(t)\,dt$; Satz von Schwarz; partielle Ableitungen der Ordnung k, Taylorformel, Differentiale der Ordnung k, Lagrangeform und Integralform des Restes, qualitative Taylorformel; zweite Ableitung und Kriterien für lokale Extrema, Hessematrix; Anwendung auf harmonische Funktionen: Maximumprinzip, Eindeutigkeit beim Dirichlet-Problem für die Poissongleichung; Taylorreihe, Eindeutigkeit, Methoden zur Berechnung der Taylorreihe; parameterabhängige Integrale: Stetigkeit, Tubenlemma, Differentiation unter dem Integralzeichen
(Königsberger II, Kapitel 2)

15. Differenzierbare Abbildungen

Differenzierbarkeit von Abbildungen $f : X \to Y$, Ableitung $Df(a)$, Richtungsableitungen, Kettenregel (allgemeine Version), Jacobimatrix, Reduktion auf den Standardfall; Anwendung: Newtonverfahren; Beispiele: $f(x) = x^2$ und $f(x) = x^k$ für Matrizen x, Ableitung der Matrixinversion, bilineare Abbildungen und allgemeine Produktregel; Integration von Regelfunktionen mit Werten in einem Vektorraum Y, Standardabschätzung für Integrale; Schrankensatz; Hauptkriterium und $C^1(U, Y)$; Differentiale (Ableitungen) der Ordnung k; Taylorformel; Diffeomorphismen, Satz über inverse Funktionen, lokale Diffeomorphismen; Satz über implizite Funktionen, Berechnung von $Dg(x)$ aus $f(x, g(x)) = 0$; Untermannigfaltigkeiten, reguläre Niveaumengen, Beispiele: Sphäre, Graphen, $\mathrm{SL}(\mathrm{n}, \mathbb{R})$ und orthogonale Gruppe $\mathrm{O(n)}$ als Untermannigfaltigkeiten von $\mathbb{R}^{n\times n}$; Tangentialraum T_xM; Normalenraum $(T_xM)^\perp$, Extrema mit Nebenbedingungen und Lagrange-Multiplikatoren
(Königsberger II, Kapitel 3; Taylorformel: Vorlesung)