SP 2017 **Analyse IV – Série 48** P. Ghanaat

à remettre jusqu'au mardi 23 mai 2017 13:15 heures
dans le casier entre les bureaux 2.55 et 2.56 du bâtiment de physique

Exercice 175. Applications conformes. Pour les domaines $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ suivants, trouver une application biholomorphe de Ω sur le disque unité $\mathbb{D} = \{|z| < 1\}$. Ici, $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\Omega_1 &= \{z \mid x + y < 2\} \\
\Omega_2 &= \{z \mid 1 < x + y < 2\} \\
\Omega_3 &= \{z \mid x > 1 \text{ si } y = 0,\ x > 0 \text{ si } y \neq 0\} \\
\Omega_4 &= \{z \mid 0 < |z| < 1,\ 0 < \arg(z) < \alpha\pi\}
\end{aligned}$$

Exercice 176. Fonction de Green. Soient $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ un ouvert, $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{C}$ le disque unité $\mathbb{D} = \{|z| < 1\}$, et soit $f : \Omega \to \mathbb{D}$ une application biholomorphe avec $f(z_0) = 0$.

(a) Montrer que, sous les conditions appropriées sur f au bord $\partial\Omega$, la fonction de Green de Ω satisfait
$$G(z, z_0) = \frac{1}{2\pi} \ln |f(z)| \,.$$

(b) Pour $z, z_1 \in \Omega$ arbitraire, exprimer $G(z, z_1)$ en termes de f.

Exercice 177. Poisson et Cauchy.

(a) Montrer que la formule intégrale de Poisson pour une fonction f holomorphe sur un disque $\bar{B}_R(0) \subseteq \mathbb{C}$ s'écrit
$$f(z) = \frac{R^2 - |z|^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\xi)}{|\xi - z|^2}\, d\theta$$
pour $z \in B_R(0)$, avec $\xi = Re^{i\theta}$.

(b) Obtenir cette formule (par soustraction) comme conséquence de la formule intégrale de Cauchy
$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_R(0)} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi$$
et du théorème intégral de Cauchy
$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_R(0)} \frac{f(\xi)}{\xi - \frac{R^2}{\bar{z}}}\, d\xi \,.$$

(c) Déduire qu'avec $z = re^{i\varphi}$ et $\xi = Re^{i\theta}$, on a
$$f(z) = \frac{R^2 - r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(Re^{i\theta})}{R^2 - 2rR\cos(\theta - \varphi) + r^2}\, d\theta \,.$$

Indications

176 **(b)** Trouver une application biholomorphe $g : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ qui jette $f(z_1) \in \mathbb{D}$ vers 0 (voir Analyse III ou [K2] p. 224). Appliquer la partie **(a)** à $g \circ f$. Résultat :

$$G(z, z_1) = \frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{f(z) - f(z_1)}{1 - f(\overline{z}_1) f(z)} \right| .$$