SP 2017 **Analyse IV – Série 47** P. Ghanaat

à remettre jusqu'au mardi 16 mai 2017 13:15 heures
dans le casier entre les bureaux 2.55 et 2.56 du bâtiment de physique

---

Exercice 172. Principe de Dirichlet. Soit Ω un domaine borné dans $\mathbb{R}^n$ pour lequel le théorème de la divergence s'applique. Pour une fonction continue $\varphi : \partial\Omega \to \mathbb{R}$, considérons l'ensemble (éventuellement vide) $\mathcal{F}_\varphi$ des fonctions $u \in C^2(\overline{\Omega})$ avec $u|_{\partial\Omega} = \varphi$. Soit $F : \mathcal{F}_\varphi \to \mathbb{R}$ la *fonctionnelle de Dirichlet*

$$F(u) := \int_\Omega ||\mathrm{grad}\, u||^2 \, dx.$$

(a) Si $u \in \mathcal{F}_\varphi$ est un minimum de F dans le sens que $F(v) \geq F(u)$ pour tout $v \in \mathcal{F}_\varphi$, alors u est harmonique.

(b) Inversément, quand $u \in \mathcal{F}_\varphi$ est harmonique, alors $F(v) \geq F(u)$ pour tout $v \in \mathcal{F}_\varphi$. L'égalité $F(v) = F(u)$ implique que $v = u$.

Exercice 173. Transformation de Kelvin. On considère l'inversion $\phi : \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \to \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ par rapport à la sphère standard $\partial B_1(0)$,

$$x \mapsto \phi(x) = y = \frac{x}{||x||^2}$$

avec la norme euclidienne $||x||$. Soient $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ et $\Omega^* = \phi(\Omega)$. La *transformation de Kelvin* est l'application $K : C^2(\Omega) \to C^2(\Omega^*)$ definie par

$$(K(u))(y) = ||y||^{2-n} u(x) = ||y||^{2-n} u\left(\frac{y}{||y||^2}\right).$$

(a) Montrer que

$$\Delta(K(u)) = K(||x||^4 \Delta u)$$

(b) Montrer que $K(K(u)) = u$. Conclure que la fonction u est harmonique dans Ω si et seulement si $K(u)$ est harmonique dans Ω^*.

Exercice 174. Harnack et Liouville.

(a) Soit u une fonction non-négative et harmonique dans un voisinage de la boule $\bar{B}_R(x_0) \subseteq \mathbb{R}^n$, et soit $0 < \rho < R$. Montrer que pour $x \in B_\rho(x_0)$ on a l'inégalité de Harnack suivante :

$$\left(\frac{R}{R+\rho}\right)^{n-2} \frac{R-\rho}{R+\rho}\, u(x_0) \leq u(x) \leq \left(\frac{R}{R-\rho}\right)^{n-2} \frac{R+\rho}{R-\rho}\, u(x_0)$$

(b) Toute fonction harmonique $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ qui est bornée inférieurement ou supérieurement est constante.

Indications

172 **(a)** Pour $\psi \in C_c^2(\Omega)$ (i.e. ψ de classe C^2 et avec support compact dans Ω) arbitraire, on a $dF(u)\psi := \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} F(u + t\psi) = 0$. Utiliser la formule de Green.

174 **(a)** Formule intégrale de Poisson.