SP 2017 **Analyse IV – Série 46** P. Ghanaat

à remettre jusqu'au mardi 9 mai 2017 13:15 heures
dans le casier entre les bureaux 2.55 et 2.56 du bâtiment de physique

---

Exercice 168.♣ Théorème de la moyenne. Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert, $u \in C^2(\Omega)$. Montrer que pour toute boule $\bar{B}_R(x) \subseteq \Omega$ on a le théorème de la moyenne généralisé :

$$u(x) = \frac{1}{\mathrm{vol}(\partial B_R(x))} \int_{\partial B_R(x)} u \, dS + \int_{B_R(x)} (\Gamma(||x-y||) - \Gamma(R)) \, \Delta u(y) \, dy$$

Remarque. Noter que $\Gamma(||x-y||) - \Gamma(R) \leq 0$ dans $B_R(x)$. Comme corollaire, on obtient des inégalités pour les fonctions sous– et super–harmoniques.

Exercice 169. Laplacien en coordonnées arbitraires. Soient $\Omega, \Omega' \subseteq \mathbb{R}^n$ des sous-ensembles ouverts.

(a) Nulltest: Soit $u : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Si

$$\int_\Omega uv \, dx = 0$$

pour tout $v \in C_0^\infty(\Omega)$, alors $u = 0$.

(b) Soit $\phi : \Omega \to \Omega'$ un difféomorphisme de classe C^2, $g = \det(g_{jk})$ avec

$$g_{jk} = \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial x_j}, \frac{\partial \phi}{\partial x_k} \right\rangle$$

le tenseur métrique de ϕ, et soit (g^{jk}) la matrice inverse de (g_{jk}). Montrer que pour tout $u \in C^2(\Omega')$ on a

$$(\Delta u) \circ \phi = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \Big(\sqrt{g} \sum_k g^{jk} \frac{\partial}{\partial x_k} (u \circ \phi) \Big).$$

Exercice 170. Fonctions harmoniques invariantes par rotation. Soit $|| \cdot ||$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$. Considérons une fonction $u : B_{r_2}(0) \backslash \bar{B}_{r_1}(0) \to \mathbb{R}$ de la forme $u(x) = f(||x||)$ avec $f \in C^2((r_1; r_2))$. Montrer : u est harmonique si et seulement si

$$u(x) = aN(x) + b$$

avec $a, b \in \mathbb{R}$ et

$$N(x) = \begin{cases} \ln(||x||) & \text{pour } n = 2, \\ ||x||^{2-n} & \text{pour } n \geq 3\,. \end{cases}$$

Exercice 171. Fonction de Green. Soient $\Omega_1 \subseteq \Omega_2$ des domaines bornés dans $\mathbb{R}^n$ avec fonctions de Green G_1 et G_2.

(a) Montrer que $G_1(x,y) \geq G_2(x,y)$ pour tous $x, y \in \Omega_1$ avec $x \neq y$.

(b) Que peut-on dire si $G_1(x,y) = G_2(x,y)$ pour un couple (x,y) ?

Indications

168 Formule de représentation de Green.

169 **(a)** $v(x) = g(||x-x_0||^2)$ avec g comme dans l'exercice 46(c).

(b) Noter que $\sqrt{g} = |\det(D\phi)|$. Pour éviter des calculs pénibles, on utilise le résultat de la première partie de l'exercice. Considérer pour une fonction $v \in C_0^\infty(\Omega')$ arbitraire l'intégrale

$$\int_{\Omega'} (\Delta u)(y)\, v(y)\, dy = \int_{\Omega} (\Delta u) \circ \phi \cdot \tilde{v} \sqrt{g}\, dx$$

avec $\tilde{v} := v \circ \phi$. Intégrer le terme à gauche par parties, c'est-à-dire utiliser que

$$\int_{\Omega'} (\Delta u)(y)\, v(y)\, dy = -\int_{\Omega'} \langle \operatorname{grad} u, \operatorname{grad} v \rangle (y)\, dy$$

(justifier) et après substituer $y = \phi(x)$. Montrer que

$$\langle \operatorname{grad} u, \operatorname{grad} v \rangle \circ \phi = \sum_{j,k} g^{jk} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_j} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_k}$$

et utiliser une autre intégration par parties pour arriver à

$$\int_{\Omega} \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\sqrt{g} \sum_j g^{jk} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_j} \right) \cdot \tilde{v}\, dx\,.$$

Comme v et donc $\tilde{v}$ est arbitraire, la partie (a) donne le résultat.

170 Ramener à l'équation différentielle linéaire $f'' + \dfrac{n-1}{r} f' = 0$.

171 Étudier la fonction $H_y := G_2(\cdot, y) - G_1(\cdot, y)$ à l'aide du principe du maximum.