SP 2017 **Analyse IV – Série 45** P. Ghanaat

à remettre jusqu'au mardi 2 mai 2017 13:15 heures
dans le casier entre les bureaux 2.55 et 2.56 du bâtiment de physique

Notation. Dans cette série, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ est un sous-ensemble ouvert.

Exercice 165. Flots globaux. Rappelons qu'un champ vectoriel $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ est dit *complet* si son flot $\Phi : \mathcal{D} \to \Omega$ est défini sur $\mathcal{D} = \mathbb{R} \times \Omega$ tout entier.

(a) Calculer et étudier les flots des champs vectoriels

$$F_1(x, y) = y\,\vec{e}_1$$
$$F_2(x, y) = x^2 \vec{e}_2$$

dans $\mathbb{R}^2$. Montrer que F_1 et F_2 sont complets, mais leur somme $F = F_1 + F_2$ ne l'est pas.

(b) Soit $\Phi : \mathcal{D} \to \Omega$ le flot d'un champ vectoriel $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Montrer : s'il existe un intervalle $I = (-\varepsilon; \varepsilon) \subseteq \mathbb{R}$ tel que $I \times \Omega \subseteq \mathcal{D}$, alors F est complet.

Exercice 166. Groupes à un paramètre.

(a) Soit $\Phi : \mathbb{R} \times \Omega \to \Omega$ une application C^k $(k \geq 1)$ telle que

$$\Phi_t := \Phi(t, \cdot) \in \mathrm{Diff}^k(\Omega)$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$. On suppose que l'application $\mathbb{R} \to \mathrm{Diff}^k(\Omega)$, $t \mapsto \Phi_t$ est un homomorphisme de groupes, i.e. $\forall\, s, t \in \mathbb{R}$

$$\Phi_{s+t} = \Phi_s \circ \Phi_t \,.$$

Montrer qu'il existe un champ de vecteurs $F \in C^k(\Omega, \mathbb{R}^n)$ tel que Φ est le flot de F.

(b) Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Déterminer F pour $\Phi_t(x) = e^{tA}x$.

Exercice 167. Courbes intégrales. Considérons un champ vectoriel $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$.

(a) Soit $M \subseteq \Omega$ une sous–variété de classe C^1 telle que la restriction $F|_M$ est tangente à M, c'est-à-dire $F(x) \in T_x M$ pour tout $x \in M$. Montrer: Si $c : I \to \Omega$ est une courbe intégrale avec $c(I) \cap M \neq \emptyset$, alors $c(I) \subseteq M$.

(b) Montrer: Si $c : (0; \infty) \to \Omega$ est une courbe intégrale telle que $p := \lim\limits_{t \to \infty} c(t) \in \Omega$ existe, alors $F(p) = 0$.

Indications

165 **(a)** Il suffit de trouver une courbe intégrale de F qui ne soit pas définie sur tout $\mathbb{R}$.

167 **(a)** M est localement définie par des équations $f_1 = 0, \ldots, f_k = 0$ (Königsberger 2, p. 117). Considerer

$$\frac{d}{dt} f_j(c(t).$$