SP 2017 **Analyse IV – Série 44** P. Ghanaat

à remettre jusqu'au mardi 11 avril 2017 13:15 heures
dans le casier entre les bureaux 2.55 et 2.56 du bâtiment de physique

Exercice 162. Calcul d'aire.

(a) Soit $\mathcal{C}_1 \subseteq \mathbb{R}^2$ la courbe (*Folium de Descartes*) définie par

$$x^3 + y^3 = 3axy$$

avec une constante $a > 0$. Trouver une paramétrisation $t \mapsto (x(t), y(t))$ en posant $y = tx$, et calculer l'aire bornée par $\mathcal{C}_1$ dans le quadrant $x, y \geq 0$.

Considérons maintenant une courbe $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^2$ donnée par $r = \rho(\theta)$ $(a \leq \theta \leq b)$ en coordonnées polaires $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$.

(b) Montrer que l'aire du domaine $a \leq \theta \leq b$, $0 < r \leq \rho(\theta)$ dans $\mathbb{R}^2$ est égale à

$$A = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{C}} r^2 d\theta\,.$$

(c) Calculer l'aire bornée par la *rose à quatre feuilles* $r = 3\sin(2\theta)$.

(d) Calculer l'aire bornée par la *lemniscate de Bernoulli* $r^2 = a^2\cos(2\theta)$.

Exercice 163. Gradient.

(a) Soit $G \subseteq \mathbb{R}^n$ un compact au quel s'applique le théorème de la divergence, et soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur un ouvert $\Omega \supseteq G$. Montrer :

$$\int_G \mathrm{grad} f\, dx = \int_{\partial G} f\nu\, dS,$$

c'est-à-dire $\int_G \partial_k f\, dx = \int_{\partial G} f\nu_k\, dS$ pour $k = 1, \ldots, n$, où ν_k sont les composantes de la normale extérieure de G.

(b) Conclure de **(a)** : si ∂G est une (hyper-)surface de niveau régulière de f, alors

$$\int_G \mathrm{grad} f\, dx = 0.$$

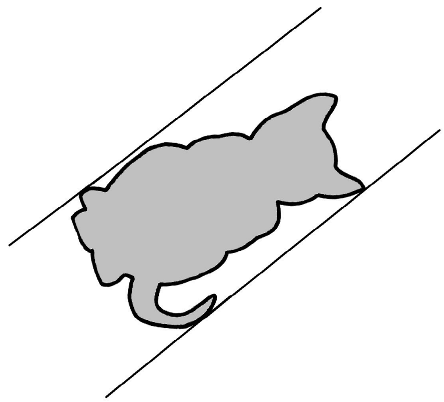
(c) Soit A_r $(r > 0)$ une famille de compacts à bord lisse dans $\mathbb{R}^n$. On suppose que A_r tend vers $a \in \Omega$ pour $r \to 0$ dans le sens suivant : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $r_0 > 0$ tel que $A_r \subseteq B_\varepsilon(a)$ quand $r \leq r_0$. Montrer que

$$\mathrm{grad} f(a) = \lim_{r \to 0} \frac{1}{\mathrm{vol}(A_r)} \int_{\partial A_r} f\nu\, dS\,.$$

Exercice 164. Une inégalité isopérimétrique. Soit $G \subseteq \mathbb{R}^n$ un compact au quel s'applique le théorème de la divergence.

(a) Montrer : si G est contenu dans le domaine borné par deux hyperplans parallèles à distance $b > 0$, alors
$$\mathrm{vol}_n(G) < \frac{b}{2}\,\mathrm{vol}_{n-1}(\partial G).$$

(b) Est-ce que la constante $b/2$ est optimale ?



Indications

162 **(b)** Formule de Leibniz.

163 **(b)** Regarder le cas $f \equiv 1$.

164 On peut supposer que les hyperplans sont donnés par $x_n = \pm b/2$. Utiliser l'exercice 163(a) avec $f(x) = x_n$.