SP 2017 **Analyse IV – Série 43** P. Ghanaat

à remettre jusqu'au mardi 4 avril 2017 13:15 heures
dans le casier entre les bureaux 2.55 et 2.56 du bâtiment de physique

---

Exercice 157.♣ Graphes implicites. On considère la sous-variété $M \subseteq \mathbb{R}^n$ de classe C^1 donnée comme l'ensemble des solutions d'une équation

$$F(x_1, \ldots, x_n) = 0,$$

où $F \in C^1(U, \mathbb{R})$ est définie sur un ouvert $U \subseteq \mathbb{R}^n$, avec $\partial_n F \neq 0$. Montrer : Si la restriction sur M de la projection $\Pi : (x_1 \ldots, x_n) \mapsto (x_1, \ldots, x_{n-1})$ est injective, alors pour $\Omega := \Pi(M)$,

$$\mathrm{vol}_{n-1}(M) = \int_\Omega \frac{\sqrt{(\partial_1 F)^2 + \ldots + (\partial_n F)^2}}{|\partial_n F|}\, d(x_1, \ldots, x_{n-1})\,.$$

Exercice 158. Ruban de Möbius. L'image de l'immersion $\varphi : [0; 2\pi] \times (-1; 1) \to \mathbb{R}^3$,

$$\varphi(u, v) = \begin{pmatrix} \left(1 + v\,\sin\frac{u}{2}\right)\cos u \\ \left(1 + v\,\sin\frac{u}{2}\right)\sin u \\ v\,\cos\frac{u}{2} \end{pmatrix}$$

est un ruban de Möbius M. Esquisser M. Prouver que M est une sous-variété C^∞ de $\mathbb{R}^3$. Déterminer une base pour l'espace tangent $T_x M$ et pour l'espace normal $T_x^\perp M$ au point $x = \varphi(u, v)$. Prouver que M n'est pas orientable. Calculer l'aire de M.

Exercice 159. Théorème de la divergence. Pour les domaines $G \subseteq \mathbb{R}^3$ et les champs vectoriels F suivants, vérifier le théorème de Gauss

$$\int_G \mathrm{div}(F)\, dx = \int_{\partial G} \langle F, \nu\rangle\, dS$$

en calculant explicitement les intégrales des deux côtés de l'équation. On note e_1, e_2, e_3 la base standard de $\mathbb{R}^3$.

(a) G le cylindre borné par les surfaces $x^2 + y^2 = 9$, $z = 0$ et $z = 2$,

$$F(x, y, z) = 2xze_1 + y^2 e_2 - 2z^2 e_3\,.$$

(b) G la demi-boule bornée par $z = \sqrt{a - x^2 - y^2}$ et $z = 0$,

$$F(x, y, z) = xz^2 e_1 + (x^2 y - z^3)e_2 + (2xy + y^2 z)e_3\,.$$

Exercice 160. Volume. On considère un "polyèdre" $G \subseteq \mathbb{R}^n$ de classe C^1 comme dans le théorème de la divergence.

(a) Soit $\psi : \Omega \to \partial G \backslash A$ une paramétrisation, où $A \subseteq \partial G$ est un ensemble négligeable dans le sens de Hausdorff de dimension $n-1$. Montrer que

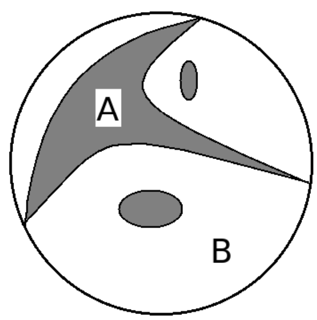
$$\mathrm{vol}_n(G) = \pm \frac{1}{n} \int_\Omega \det\left(\frac{\partial \psi}{\partial u_1}, \ldots, \frac{\partial \psi}{\partial u_{n-1}}, \psi\right) du$$

(b) Soit R le rayon de la plus petite boule qui contient G (voir l'exercice 167) et soit ρ le rayon d'une boule B_ρ avec le même volume que G, i.e. $\mathrm{vol}_n(B_\rho) = \mathrm{vol}_n(G)$. Montrer que

$$\mathrm{vol}_{n-1}(\partial G) \geq \frac{\rho}{R} \mathrm{vol}_{n-1}(\partial B_\rho)$$

avec égalité si et seulement si G est une boule.

Exercice 161.♣ La plus petite boule. Montrer que pour tout sous-ensemble borné $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}^n$ il existe une seule boule (euclidienne) fermée $B \subseteq \mathbb{R}^n$ de rayon minimal qui contient A.



Indications

157 Utiliser l'exercice 148 avec $h =$ n-ième coordonée de $(\Pi\big|_M)^{-1}$.

160 **(a)** Pour $F(x) = x$ on a $\mathrm{div}(F) = n$.

(b) Selon la partie (a),

$$\mathrm{vol}_n(G) = \pm \frac{1}{n} \int_\Omega \left\langle \frac{\partial \psi}{\partial u_1} \wedge \ldots \wedge \frac{\partial \psi}{\partial u_{n-1}}, \psi \right\rangle du\,.$$

On peut supposer que la plus petite boule B_R est centrée en 0.

161 Pour l'existence, noter qu'une boule est uniquement déterminée par le centre $x \in \mathbb{R}^n$ et le rayon $\rho > 0$.