SP 2017 **Analyse IV – Série 42** P. Ghanaat

à remettre jusqu'au mardi 28 mars 2017 13:15 heures
dans le casier entre les bureaux 2.55 et 2.56 du bâtiment de physique

Exercice 154. Règle de Guldin.

(a) Démontrer la *deuxième règle de Guldin* : l'aire d'une surface de révolution est égale à la longueur d'un méridien multiplié par la longueur du chemin parcouru par le centre de gravité de ce méridien lors de la rotation.

(b) Quelle est l'aire du tore $T^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ généré par la rotation autour de l'axe des z du cercle

$$(x-R)^2 + z^2 = a^2, \quad y = 0$$

dans le plan x, z ?

Exercice 155. Mesure de Hausdorff. Soit (X,d) un espace métrique. On définit le diamètre d'un sous-ensemble $B \subseteq X$ par $\operatorname{diam}(B) = \sup\{d(x,y) \mid x, y \in B\}$. Pour $A \subseteq X$, $t \geq 0$ et $\delta > 0$ on pose

$$\mathcal{H}^t_\delta(A) := \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} (\operatorname{diam}(B_i))^t \;\middle|\; A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i,\ B_i \subseteq X \text{ avec } \operatorname{diam}(B_i) \leq \delta \right\}$$

La *mesure de Hausdorff t-dimensionelle* d'un sous-ensemble $A \subseteq X$ est définie par

$$\mathcal{H}^t(A) := \lim_{\delta \to 0} \mathcal{H}^t_\delta(A) \in [0, \infty]$$

(a) Montrer que cette limite existe.

(b) Soit $0 \leq s < t$. Si $\mathcal{H}^s(A) < \infty$ alors $\mathcal{H}^t(A) = 0$.

(c) Si l'on change la définition de $\mathcal{H}^s_\delta(A)$ en exigeant que les ensembles B_i soient des boules, on obtient la notion de mesure de Hausdorff *sphérique* $\mathcal{S}^t(A)$. Montrer que

$$\mathcal{H}^t(A) \leq \mathcal{S}^t(A) \leq 2^t \mathcal{H}^t(A).$$

(d) Montrer :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^t(A) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \exists\, \delta > 0 :\ \mathcal{H}^t_\delta(A) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad \forall\, \varepsilon > 0 \ \ \exists\, B_1, B_2, \ldots \subseteq X \text{ tel que} \\ &\qquad\quad A \subseteq \textstyle\bigcup_i B_i \ \text{ et } \ \sum_i \operatorname{diam}(B_i)^t \leq \varepsilon \end{aligned}$$

Exercice 156. Dimension de Hausdorff. Soit (X, d) un espace métrique. La *dimension de Hausdorff* d'un sous-ensemble $A \subseteq X$ est definie par

$$\mathrm{Hdim}(A) = \inf \{t \in [0, \infty] \mid \mathcal{H}^t(A) = 0\}.$$

(a) Montrer que

$$\mathcal{H}^t(A) = \begin{cases} \infty & \text{si } t < \mathrm{Hdim}(A); \\ 0 & \text{si } t > \mathrm{Hdim}(A). \end{cases}$$

(b) Montrer que pour $A_i \subseteq X$

$$\mathrm{Hdim}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sup_{i \in \mathbb{N}} \mathrm{Hdim}(A_i)$$

(c) On considère $\mathbb{R}^n$ avec la métrique euclidienne. Montrer que $\mathrm{Hdim}(\mathbb{R}^n) = n$.

(d) Soit

$$\mathcal{C} = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} \;\middle|\; \forall n : a_n \in \{0, 2\} \right\}$$

l'ensemble de Cantor classique. Montrer que $\mathrm{Hdim}(\mathcal{C}) \leq \frac{\ln 2}{\ln 3}$.

(e) ♣ Montrer que

$$\mathrm{Hdim}(\mathcal{C}) = \frac{\ln 2}{\ln 3} = 0.6309\ldots.$$