SP 2017 **Analyse IV – Série 41** P. Ghanaat

à remettre jusqu'au mardi 21 mars 2017 13:15 heures
dans le casier entre les bureaux 2.55 et 2.56 du bâtiment de physique

---

Exercice 150. Potentiel de Newton. Le *potentiel de Newton* $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ d'une *surface* $M \subseteq \mathbb{R}^3$ munie d'une distribution de masse de densité $\rho : M \to \mathbb{R}$ est défini par l'intégrale de surface

$$u(p) := \int_M \frac{\rho(x)}{||x-p||}\, dS(x)\,.$$

Calculer le potentiel de Newton de la sphère

$$S_r^2 := \{x \in \mathbb{R}^3 : ||x|| = r\}$$

de densité constante $\rho = \rho_0 > 0$.

Exercice 151. Intégration sur $\mathbb{R}^n$ et sur S^{n-1}. Soit f une fonction intégrable sur $\mathbb{R}^n$. Montrer : Pour presque tout $r > 0$ la fonction f est intégrable sur la sphère rS^{n-1}, et

$$\int_{\mathbb{R}^n} f dx = \int_{\mathbb{R}_+} \left(\int_{S^{n-1}} f(rx) dS \right) r^{n-1} dr\,.$$

Exercice 152. Fubini. Soient $M \subseteq \mathbb{R}^m$ et $N \subseteq \mathbb{R}^n$ des sous-variétés de classe C^1, et soit $f : M \times N \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable sur la sous-variété $M \times N \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$. On veut montrer que pour presque tout $x \in M$ la fonction $y \mapsto f(x, y)$ est intégrable sur N, la fonction $x \mapsto \int_N f(x, y)\, dS(y)$ est intégrable sur M, et

$$\int_{M\times N} f(x, y)\, dS(x, y) = \int_M \left(\int_N f(x, y)\, dS(y) \right) dS(x).$$

(a) Prouver cette affirmation si M, N sont des sous-variétés paramétrisables.

(b) Prouver l'affirmation si M, N sont des sous-variétés compactes.

Exercice 153.$^\clubsuit$ Ensembles de mesure nulle.

(a) Un point $x \in \mathbb{R}$ est dit *point de condensation* d'un ensemble $A \subseteq \mathbb{R}$ si l'intersection de chaque voisinage de x avec A est non-dénombrable. Construire un ensemble de mesure nulle $N \subseteq \mathbb{R}$ satisfaisant la propriété suivante : chaque point de $\mathbb{R}$ est un point de condensation de N.

(b) Preuve ou contre-exemple : Si $A, B \subseteq \mathbb{R}$ sont des ensembles de mesure nulle, alors $A + B = \{a + b \mid a \in A,\ b \in B\}$ est un ensemble de mesure nulle.

Indications

150 Noter (et prouver) la symétrie $u(Ap) = u(p)$ pour $A \in O(3)$. Il suffit donc de calculer $u(p)$ dans les points $p = (0, 0, a)$. Voir [K2], p. 374.

151 Considérer une paramétrisation quelconque $\varphi : \Omega \to S^{n-1} \backslash A$ où A est un ensemble négligeable. (Un tel φ existe; voir [K2], p. 375.) On obtient une paramétrisation $\psi : \mathbb{R}_+ \times \Omega \to \mathbb{R}^n \backslash B$ définie par $\psi(r, u) = r\varphi(u)$. Déterminer la relation entre les déterminants de Gram de φ et de ψ, et utiliser le théorème de Fubini.

152 Si ψ, φ sont des paramétrisations de M, N, alors $(u, v) \mapsto (\psi(u), \varphi(v))$ est une paramétrisation de $M \times N$. Ramener **(a)** au théorème de Fubini ([K2] p. 289). Dans **(b)** utiliser des partitions de l'unité finies sur M et sur N pour obtenir une partition de l'unité finie sur $M \times N$.

153 **(a)** et **(b)** : jouer avec l'ensemble de Cantor.