SP 2017 **Analyse IV – Série 40** P. Ghanaat

à remettre jusqu'au mardi 14 mars 2017 13:15 heures
dans le casier entre les bureaux 2.55 et 2.56 du bâtiment de physique

Exercice 146. Fubini. Utiliser le théorème de Fubini et l'identité

$$\frac{1}{x} = \int_0^\infty e^{-xt} dt \qquad (x > 0)$$

afin de prouver que

$$\lim_{a \to \infty} \int_0^a \frac{\sin x}{x} \, dx = \frac{\pi}{2} \, .$$

Exercice 147. Intégrale de Riemann. Une fonction $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$, est dite *intégrable au sens de Riemann* (ou *Riemann-intégrable*) si pour tout $\varepsilon > 0$ il y a des fonctions en escalier φ et ψ telles que $\varphi \leq f \leq \psi$ sur A et $||\psi - \varphi||_1 \leq \varepsilon$. Montrer :

(a) Toute fonction reglée $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ est Riemann-intégrable.

(b) La fonction indicatrice $\mathbf{1}_{\mathcal{C}}$ de l'ensemble de Cantor $\mathcal{C} \subseteq [0; 1]$ n'est pas une fonction reglée, mais elle est Riemann-intégrable.

(c) Toute fonction Riemann-intégrable est Lebesgue-intégrable, et on a

$$\int_A f \, dx = \sup \left\{ \int_A \varphi \, dx \;\middle|\; \varphi \text{ fonction en escalier avec } \varphi \leq f \text{ sur } A \right\} .$$

(d) Trouver une fonction Lebesgue-intégrable qui n'est pas Riemann-intégrable.

Exercice 148. Intégration sur les graphes.

(a) Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ un ouvert, et soit $M \subseteq \mathbb{R}^n$ le graphe d'une fonction $h : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe C^1. Soit $f : M \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable. Montrer :

$$\int_M f \, dS = \int_\Omega f(u, h(u)) \sqrt{1 + ||\mathrm{grad}\, h(u)||^2} \, du$$

(b) Utiliser cette formule pour calculer l'aire $\mathrm{vol}_{n-1}(S_+^{n-1})$ de l'hémisphère

$$S_+^{n-1} := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; ||x|| = 1 \text{ et } x_n > 0 \right\} .$$

Exercice 149.♣ Lemme de Fatou. Pour une suite $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de fonctions intégrables $f_k : \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$ on considère la fonction $\liminf\limits_{k\to\infty} f_k$ définie par

$$(\liminf_{k\to\infty} f_k)(x) = \liminf_{k\to\infty}(f_k(x)) = \lim_{k\to\infty}\ \inf_{j\geq k}\ f_j(x)\,.$$

(a) Montrer : Si la suite des intégrales $\int_{\mathbb{R}^n} f_k\,dx$ est bornée, alors $\liminf\limits_{k\to\infty} f_k$ est intégrable avec

$$\boxed{\int_{\mathbb{R}^n} \liminf_{k\to\infty} f_k\,dx \leq \liminf_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k\,dx}$$

(b) Donner un exemple d'une suite (f_k) pour laquelle l'inégalité est stricte.

Indications

146 Intégration par parties pour $\int \sin(x)\,e^{-xt}dx$. Regarder Königsberger 2, p. 282f pour la justification de la limite sous l'intégrale.

147 **(d)** Si $N \subseteq [0;1]$ est un ensemble négligeable (Nullmenge), alors la fonction indicatrice $\mathbf{1}_N$ est intégrable au sens de Lebesgue (pourquoi ?). Choisir un N convenable.

148 **(b)** Voir Königsberger 2, p. 358.

149 **(a)** Utiliser le théorème de Beppo Levi. Considérer les fonctions $g_k(x) = \inf_{j\geq k}\ f_j(x)$ et $g_{k,l}(x) = \inf_{k\leq j\leq l}\ f_j(x)$.