SP 2017 **Analyse IV – Série 39** P. Ghanaat

à remettre jusqu'au mardi 7 mars 2017 13:15 heures
dans le casier entre les bureaux 2.55 et 2.56 du bâtiment de physique

---

Exercice 142. Volume. Calculer le volume des ensembles suivants.

(a) L'intersection du cylindre $(x-2)^2 + y^2 \leq 4$ avec la boule $x^2 + y^2 + z^2 \leq 16$ dans $\mathbb{R}^3$.

(b) Le tétraèdre à sommets a_1, a_2, a_3, a_4 dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 143. Volume.

(a) Calculer le volume de l'ensemble compact borné par l'ellipsoïde $x^T Ax + c = 0$ dans $\mathbb{R}^n$, où $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est une matrice symétrique définie positive et $c \in \mathbb{R}$. Exprimer le résultat en termes des valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de A.

(b) Généraliser à $x^T Ax + \langle b, x\rangle + c = 0$ avec $b \in \mathbb{R}^n$.

Exercice 144. Fonction de Cantor - devil's staircase. Considérons l'ensemble de Cantor $\mathcal{C} \subseteq [0,1]$ (voir l'exercice 37),

$$\mathcal{C} = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} \;\middle|\; a_n \in \{0,2\} \text{ pour tout } n \right\}.$$

On définit la fonction $\varphi : \mathcal{C} \to [0,1]$ par

$$\varphi\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}\right) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^{n+1}} \quad \text{où } a_n \in \{0,2\}.$$

(a) Montrer que la fonction $\varphi : \mathcal{C} \to [0,1]$ est bien définie, continue et surjective. Esquissez le graphe de φ.

(b) Montrer que la fonction $\varphi : \mathcal{C} \to [0,1]$ possède un prolongement continu monotone $f : [0,1] \to [0,1]$ unique, appelé *fonction de Cantor* ou *devil's staircase*.

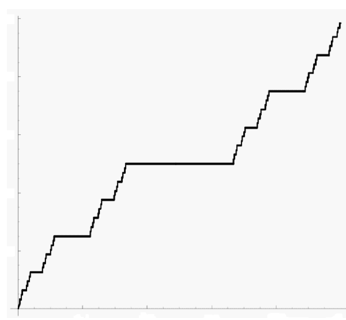
(c) Conclure que f est différentiable presque partout dans $[0,1]$, la dérivée f' est intégrable, mais

$$\int_0^1 f'(x)\,dx \neq f(1) - f(0)\,.$$

Exercice 145.♣ Ensembles de Cantor généralisés.

(a) Montrer par une modification appropriée de la construction de l'ensemble de Cantor $\mathcal{C}$: Pour chaque nombre a avec $0 < a < 1$, il existe un ensemble compact $\mathcal{C}_a \subseteq [0,1]$ de mesure de Lebesgue $v(\mathcal{C}_a) = a$ qui ne contient aucun intervalle de longueur positive.

(b) Montrer qu'il existe un *homéomorphisme* $f : [0,1] \to [0,1]$ qui applique l'ensemble $\mathcal{C}$ de mesure nulle sur un ensemble $\mathcal{C}_a$ de mesure $v(\mathcal{C}_a) = a > 0$.



Indications

144 **(a)** Königsberger 1, p. 102.

(c) $f' = 0$ presque partout.

145 **(a)** Suivre Königsberger 2, p. 267.