SP 2017 **Analyse IV – Série 38** P. Ghanaat

à remettre jusqu'au mardi 28 février 2017 13:15 heures
dans le casier entre les bureaux 2.55 et 2.56 du bâtiment de physique

---

Exercice 138. Potentiel Newtonien. Soient $n \geq 3$, $K \subseteq \mathbb{R}^n$ compact, et $\rho : K \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable et bornée. Le *potentiel Newtonien* de la fonction ρ est la fonction $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par

$$u(x) = \int_K \frac{\rho(y)}{||x-y||^{n-2}}\, dy$$

avec $||x-y|| = \left(\sum |x_i - y_i|^2\right)^{1/2}$. Montrer :

(a) L'intégrale existe pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, et la fonction u est continue.

(b) u est harmonique à l'extérieur de K, c'est-à-dire $\Delta u = 0$ sur $\mathbb{R}^n \backslash K$.

(c) Si $M := \int_K \rho(y)dy$, et si $a \in \mathbb{R}^n$ avec $||a|| = 1$, alors $u(ra)$ et $\frac{M}{r^{n-2}}$ pour $r \to \infty$ sont asymptotiquement égaux, c'est-à-dire

$$\lim_{r\to\infty} \frac{u(ra)}{M/r^{n-2}} = 1$$

Interpretation. Loin de K (et donc de l'origine), le potentiel gravitationnel u généré par la distribution de masse ρ se comporte comme le potentiel d'une charge ponctuelle de masse M.

(d) Si K est une boule centrée à l'origine, et si $\rho \circ T = \rho$ pour une transformation orthogonale $T \in \mathrm{O}(n)$, alors $u \circ T = u$.

Exercice 139. Intégrales.

(a) On veut écrire les intégrales $\int(\int f(x,y)\,dy)dx$ dans l'ordre inverse $\int(\int f(x,y)\,dx)dy$. Déterminer les limites d'intégration.

$$\int_0^1 \left(\int_{\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x,y)\,dy\right) dx$$

$$\int_0^2 \left(\int_{-\sqrt{1-(x-1)^2}}^{0} f(x,y)\,dy\right) dx$$

$$\int_0^{2a} \left(\int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{4ax}} f(x,y)\,dy\right) dx,\ a>0$$

(b) Calculer l'intégrale :

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_a^b (yz)^x \, dx \, dy \, dz, \quad -1 < a < b$$

Exercice 140. Intégrales. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue.

(a) Montrer : $\displaystyle \int_0^x \left(\int_0^y f(t)\, dt \right) dy = \int_0^x (x-t) f(t)\, dt$

(b) Trouver et prouver la formule correspondante pour

$$\int_0^{x_1} \int_0^{x_2} \cdots \int_0^{x_n} f(t)\, dt \, dx_n \ldots dx_2$$

Exercice 141. Volumes.

(a) Soit A l'intersection du demi-plan $x \geq 0$ et du disque unité fermé $x^2 + y^2 \leq 1$. Calculer l'intégrale

$$\int_A \sqrt{1 - x^2 - y^2}\, d(x, y)$$

En déduire que le volume de la boule unité de $\mathbb{R}^3$ est $4\pi/3$.

(b) On creuse dans la boule $K = B_r(0)$ de rayon r autour de l'origine un cylindre

$$Z = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq \rho^2\}$$

de rayon $0 < \rho < r$. Calculer le volume restant $K \backslash Z$.

Indications

138 Suivre Königsberger 2, p. 277, 285. Pour **(b)** utiliser le "Differentiationssatz" p. 283, pour **(d)** le théorème de changement de variables dans les intégrales multiples (Transformationssatz).

140 **(b)** $\frac{1}{(n-1)!} \int_0^{x_1} (x_1 - t)^{n-1} f(t)\, dt$

141 **(b)** $\frac{4\pi}{3} (r^2 - \rho^2)^{3/2}$