SA 2016 **Analyse III – Série 37** P. Ghanaat

à remettre jusqu'au mardi 20 décembre 2016 13:15 heures
dans le casier entre les bureaux 2.55 et 2.56 du bâtiment de physique

Exercice 135. Suite de Fibonacci. Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une série entière dont les coefficients sont définis par les relations de récurrence suivantes: $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ et, pour $n \geq 2$,

$$a_n = \alpha a_{n-1} + \beta a_{n-2}$$

où α, β sont deux nombres différents de zéro.

(a) Montrer que le rayon de convergence ρ est positif.

(b) Soit $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ pour $|z| < \rho$. Montrer que

$$f(z) = \frac{z}{1 - \alpha z - \beta z^2}\,.$$

(c) Soient z_1, z_2 les racines de $\beta z^2 + \alpha z - 1 = 0$. Exprimer le rayon ρ en termes de z_1, z_2, et donc de α, β.

(d) Donner une formule explicite pour a_n en termes de z_1, z_2, et donc de α, β.

(e) ♣ Généraliser à $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ avec $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ et pour $n \geq 3$

$$a_n = \alpha a_{n-1} + \beta a_{n-2} + \gamma a_{n-3}$$

où α, β, γ sont trois nombres donnés.

Exercice 136. Fubini.

(a) Montrer en calculant les intégrales :

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\, dx \right) dy \neq \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\, dy \right) dx$$

(b) Soit $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{C}$ continue. Prouver la formule d'échange

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\, dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\, dx \right) dy,$$

en remplaçant des deux côtés b par une variable $s \in [a,b]$ et en dérivant par rapport à s.

Exercice 137.$^\clubsuit$ **Principe de réflexion de Schwarz.**

(a) Soient U un ouvert et L une droite dans $\mathbb{C}$. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction qui est continue dans U et holomorphe dans $U \backslash L$. Montrer que f est holomorphe dans U.

(b) Soit $\mathbb{H} = \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid y > 0\}$ le demi-plan supérieur. Soit $f : \mathbb{H} \cup \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue dans $\mathbb{H} \cup \mathbb{R}$ qui est holomorphe dans $\mathbb{H}$ et satisfait $f(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$. Montrer que f peut être prolongée en une fonction holomorphe $\tilde{f} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ par

$$\tilde{f}(z) := \begin{cases} f(z), & \text{si } \mathrm{Im}(z) \geq 0 \\ \overline{f(\bar{z})}, & \text{si } \mathrm{Im}(z) < 0 \end{cases}$$

Ici $^-$ dénote la conjugaison complexe.

Indications

135 **(a)** $|a_n| \leq c^n$

(d) Décomposer f en fractions simples et utiliser la série géométrique.

137 **(a)** Théorème de Morera.

(b) Utiliser (a).