SA 2016 **Analyse III – Série 36** P. Ghanaat

à remettre jusqu'au mardi 13 décembre 2016 13:15 heures
dans le casier entre les bureaux 2.55 et 2.56 du bâtiment de physique

Exercice 132. Intégrales. Calculer les intégrales suivantes. Ici $a, b \in \mathbb{R}$, $a > |b|$.

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a + b\sin t} \qquad \int_0^{2\pi} \frac{dt}{(5 - 3\sin t)^2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{t\cos(\pi t)}{t^2 + 2t + 5}\, dt \qquad \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2(x^2 + b^2)}$$

Exercice 133. Calcul de Wirtinger. Considérons des fonctions $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ différentiables dans un ouvert $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ et une fonction $h : \Omega' \to \mathbb{C}$ différentiable sur un ouvert $\Omega' \supseteq f(\Omega)$. Les *dérivées de Wirtinger* $\partial_z = \frac{\partial}{\partial z}$ et $\partial_{\bar z} = \frac{\partial}{\partial \bar z}$ sont définies par

$$\partial_z = \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y) \qquad \partial_{\bar z} = \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y)$$

(a) Montrer que $\partial_z f$ et $\partial_{\bar z} f$ sont caractérisées par

$$df = \frac{\partial f}{\partial z}\, dz + \frac{\partial f}{\partial \bar z}\, d\bar z.$$

Conclure que pour toute courbe différentiable $c : I \to \Omega$ on a

$$\frac{d(f \circ c)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dc}{dt} + \frac{\partial f}{\partial \bar z}\frac{d\bar c}{dt}.$$

(b) Montrer : La fonction f est holomorphe si et seulement si $\partial_{\bar z} f = 0$, et alors $\partial_z f = f'$, la derivée complexe.

(c) Montrer :

$$\partial_z(fg) = g\,\partial_z f + f\,\partial_z g \qquad \partial_z f = \overline{\partial_{\bar z} \bar f}$$

$$\frac{\partial(h \circ f)}{\partial z} = \frac{\partial h}{\partial w}\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial h}{\partial \bar w}\frac{\partial \bar f}{\partial z}$$

Trouver des formules analogues pour $\partial_{\bar z}(fg)$, $\partial_{\bar z} f$ et $\dfrac{\partial(h \circ f)}{\partial \bar z}$.

(d) Montrer que l'opérateur laplacien $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2$ s'écrit

$$\Delta f = 4\,\partial_z \partial_{\bar z} f$$

si f est deux fois différentiable. En déduire : si f est holomorphe, alors $\Delta(|f|^2) = 4|f'|^2 \geq 0$, c'est-à-dire $|f|^2$ est une fonction *sous-harmonique*.

Exercice 134. Sommation de séries.

(a) Déterminer les singularités et les résidus de la fonction $\cot(\pi z) = \dfrac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)}$.

(b) Soit f méromorphe dans $\mathbb{C}$ avec un nombre fini de pôles $a_1, \dots, a_m$ dont aucun n'appartient à $\mathbb{Z}$. Supposons que $\lim\limits_{|z|\to\infty} z f(z) = 0$. Montrer (en suivant les indications) que

$$\boxed{\lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} f(n) = -\sum_{k=1}^{m} \pi \operatorname{Res}_{a_k}(f(z)\cot(\pi z))}$$

(c) Déduire que pour $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ on a $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2 - a^2} = -\frac{\pi\cot(\pi a)}{a}$ et donc pour $z \notin \mathbb{Z}$

$$\pi\cot(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}$$

(d) Montrer que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2+n+1} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \tanh \frac{\pi\sqrt{3}}{2}\,.$$

Indications

132 Résultats : $\dfrac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}$ $\quad \dfrac{5\pi}{32}$ $\quad \dfrac{\pi}{2}e^{-2\pi}$ $\quad \dfrac{\pi(2a+b)}{4a^3b(a+b)^2}$

133 **(a)** Plus précisément, la formule à montrer est $\dfrac{d(f\circ c)}{dt} = \dfrac{\partial f}{\partial z}\circ c \cdot \dfrac{dc}{dt} + \dfrac{\partial f}{\partial \bar z}\circ c \cdot \dfrac{d\bar c}{dt}$.

134 **(b)** Soit Q_N le carré dont les coins sont $(N+1/2)(\pm 1 \pm i)$. Montrer que sur son bord ∂Q_N on a $|\cot(\pi z)| \le A$ avec une constante A qui ne dépend pas de N. En déduire que

$$\int_{\partial Q_N} \pi f(z)\cot(\pi z)\,dz \to 0 \qquad (N\to\infty)$$

et employer le théorème des résidus.