SA 2016 **Analyse III – Série 35** P. Ghanaat

à remettre jusqu'au mardi 6 décembre 2016 13:15 heures
dans le casier entre les bureaux 2.55 et 2.56 du bâtiment de physique

Exercice 128. Intégrales. Montrer en choisissant des chemins d'intégration judicieux dans $\mathbb{C}$:

$$\int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{1+x^n}\,dx = \frac{\pi}{n\,\sin(m\pi/n)} \qquad \int_{-\infty}^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \pi$$

où $m < n$ sont des nombres naturels. *Indications* dans [K2] p. 230f.

Exercice 129. Fonctions de Bessel. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ on considère le développement de Laurent

$$\exp\left(\frac{z}{2}\Big(w - \frac{1}{w}\Big)\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z) w^n$$

pour $w \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Le coefficient $J_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est la *fonction de Bessel* d'ordre n. Montrer que $J_{-n} = (-1)^n J_n$ et, pour $n \geq 0$,

$$J_n(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}$$

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos\left(z\sin t - nt\right) dt\,.$$

Exercice 130. Rouché. (i) Combien de zéros de la fonction

$$f(z) = z^7 - 2z^5 + 6z^3 - z + 1$$

se trouvent dans le disque $|z| < 1$?

(ii) Combien de solutions de $z^7 - 5z^3 + 12 = 0$ y a-t-il dans la couronne $1 < |z| < 2$?

(iii) Montrer que pour tout réel $a > 1$ il y a une solution unique de $z + e^{-z} = a$ dans le demi-plan $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 0\}$.

(iv) Montrer que la solution dans (iii) est un nombre réel.

Exercice 131.♣ Rouché. Soient $U \subseteq \mathbb{C}$ un ensemble ouvert, $a \in U$ et $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe avec $f'(a) \neq 0$. Montrer en utilisant le théorème de Rouché qu'il existe un rayon r et un voisinage ouvert $V \subseteq U$ de a tel que $f|_V : V \to B_r(f(a))$ est bijective. *Indication:* Pour $a = 0$ et $f(0) = 0$, considérer la série de Taylor $f(z) = a_1 z + z^2 h(z)$.