SA 2016 **Analyse III – Série 34** P. Ghanaat

à remettre jusqu'au mardi 29 novembre 2016 13:15 heures
dans le casier entre les bureaux 2.55 et 2.56 du bâtiment de physique

Exercice 124. Logarithme d'une matrice.

(a) Calculer la dérivée
$$d\exp(0) : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$$
de l'application exponentielle $\exp : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}^{n\times n}$ au point 0. En déduire que $\exp$ est un difféomorphisme d'un voisinage ouvert $U \subseteq \mathbb{R}^{n\times n}$ de 0 sur un voisinage ouvert $V \subseteq \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ de la matrice unité I.

(b) Soit $||\cdot||$ une norme sur $\mathbb{R}^{n\times n}$ avec la propriété $||AB|| \leq ||A||\,||B||$. Montrer que pour $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ avec $||A-I|| < 1$, la série suivante converge absolument :
$$\log(A) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}(A-I)^k$$

(c) Montrer que pour $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ avec $||A-I|| < 1$, on a
$$\exp(\log(A)) = A.$$

(d) Montrer qu'il existe un voisinage $U_1 \subseteq \mathbb{R}^{n\times n}$ de 0 avec la propriété suivante : pour tout $X \in U_1$, on a
$$\log(\exp(X)) = X.$$

Exercice 125. Développement de Laurent. Déterminer le développement de Laurent des fonctions suivantes dans les domaines donnés.

$$\sin\left(\frac{z}{1-z}\right) \text{ pour } 0 < |z-1| < \infty \qquad \frac{1}{z(z-3)^2} \text{ pour } 1 < |z-1| < 2$$

$$\frac{z^2-1}{z^2+1} \text{ pour } |z-1| > \sqrt{2} \qquad e^{z+\frac{1}{z}} \text{ pour } |z| > 0$$

Exercice 126.♣ Fonctions rationnelles. Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorphe à l'exception d'un nombre fini de points $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{C}$ qui sont des pôles. Supposons que f est bornée à l'infini dans le sens qu'il existe $R, M > 0$ tels que $|f(z)| \leq M$ pour $|z| \geq R$. Montrer que f est une fonction rationnelle (quotient de polynômes).

Exercice 127. Fonctions entières. Soient $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorphes. Montrer :

(a) Si $|f(z)| \leq |g(z)|$ pour tout $z \in \mathbb{C}$, alors $f = cg$ avec une constante $c \in \mathbb{C}$.

(b) Tout automorphisme holomorphe de $\mathbb{C}$ est de la forme $f(z) = az + b$ avec $a, b \in \mathbb{C}$.

(c) S'il existe des nombres positifs a, b tels que $|f(z)| \leq a\,|z|^n + b$ pour tout $z \in \mathbb{C}$, alors f est un polynôme de degré $\leq n$.

(d) Si f n'est pas un polynôme, alors il existe une suite $z_1, z_2, \ldots$ avec $\lim\limits_{k\to\infty} |z_k| = \infty$ telle que

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|f(z_k)|}{|p(z_k)|} = \infty$$

pour tout polynôme $p \neq 0$.

Indications

124 Consulter Königsberger 2, pages 39 et suivantes. Pour la partie **(c)**, poser $X = A - I$ et considérer les fonctions $f(t) = \exp(\log(I + tX))$ et $g(t) = I + tX$. Montrer que f et g sont solutions de la même équation différentielle $\dot{\varphi} = X(I + tX)^{-1}\varphi(t)$. Pour **(d)**, utiliser **(a)** et **(c)**.

126 Considérer les singularités de la fonction $g := f - f_1 - \ldots f_m$, avec f_k la partie principale de la série de Laurent en a_k.

127 **(a)** Considérer les singularités de la fonction f/g.
(b) Étudier la singularité de la fonction $g(z) = f(\frac{1}{z})$ en $z = 0$.
(c) Considérer les coefficients de Taylor en 0.